数学全書 14

発散級数論

北海道大学教授
理学博士
石黒一男 著

森北出版株式会社

ま え が き

発散級数論の歴史は非常に古い．すでに前世紀の終りにはこの方面の論文が現れている．その後数多くのすぐれた研究がなされた．1949 年に G. H. Hardy の名著 Divergent series が出版され，それまでになされた研究の成果を集大成した．この 1949 年に W. Meyer–König と P. Vermes はこの分野の研究をさらに大きく進展させた．この同じ頃から西ドイツ，ポーランドでは関数解析の方法による研究も盛んに発表された．

本書で著者は，発散級数論を学ぶ上に必要な基本的な事項を主として大学4年生，大学院学生を対象として述べた．第1章，§§ 1—4 の諸定理は，C. Goffman, G. M. Petersen の定理を除いては古くより知られている基本定理である．§5 の G. G. Lorentz, K. Zeller の定理は，総和法の本質に触れる重要な結果であるが，その発見は比較的最近のものである．

第2章，§§ 6—10 の諸定理の大部分は古くより知られ，W. Jurkat の定理，M. S. Ramanujan の定理以外は，すでにいろいろな書物に述べられている事柄である．§11 の Euler 総和法は，Euler–Knopp 総和法ともいわれる．次数が実数で，かつ permanent である場合のこの総和法は，Hardy の上記書物にも詳しく述べられているが，本書に述べたように次数が複素数まで含めて一般の場合の研究は R. P. Agnew にはじまる．§§12, 13, 14 の諸定理はいずれも Hardy の書物以後に得られた重要な結果である．§§11, 12, 13, 17 の各種総和法は，互いに密接な関係を有し，また必ずしも permanent でない総和法の研究に興味ある題材を提供している．三角級数の研究に重要な役割を演ずる Riemann 総和法，(R, p)，(R_p) 総和法の諸定理は興味深いものであるが，紙面の都合でごく簡単に触れるにとどめた．

第3章の N. Wiener の general Tauberian theorem は，総和法の分野で得られた極めて見事な成果の一つであろう．本書は D. V. Widder, G. H. Hardy に従って述べた．

第4章は S. Mazur, W. Orlicz, K. Zeller による結果の紹介である．この方面の研究は現在もなお続けられ，興味深い研究が後を絶たない．本書で述

べたのは，この分野で今日ではすでに古典ともなっている基本定理である．第3章ではルベーグ積分，第4章では関数解析の基礎的知識を前提とした．

執筆に際しては，西ドイツの W. Meyer-König 教授 (Stuttgart 大学) および K. Zeller 教授 (Tübingen 大学) との多年にわたる共同研究に負うところ誠に大きい．本書を書く機会を与えて下さった小松勇作先生へとともに著者はここに心から御礼を申し上げたい．

1976 年 11 月

著者しるす

目　　次

第1章　基本定理

§1.　定義と記号

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が与えられたとき，その第 n 部分和を

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \quad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと，一つの数列 $\{s_n\}$ が得られる．また逆にある数列 $\{s_n\}$ が与えられると，

$$u_n = s_n - s_{n-1} \quad (n=0,\ 1,\ \cdots), \qquad \text{ただし} \quad s_{-1}=0$$

とおくことにより，s_n を第 n 部分和とするような級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ がただ一とおりに定まる．このように級数と数列とは一対一に対応するゆえ，両者を同一とみなすことができる．ここで u_n あるいは s_n は特に断わらない限りすべて複素数とする．

級数あるいは数列を取扱う場合にまず問題になるのはその収束，発散である．多くの定理は収束する級数あるいは数列のみを取扱う．発散する級数あるいは数列を収束するものと同様に取扱うにはどうしたらよいであろうか．その一つの試みが**算術平均**である．すなわち数列 $\{s_n\}$ が与えられたとき，

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \quad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

により新しい数列 $\{t_n\}$ を定義する．もし，この $\{t_n\}$ が値 s に収束するならば，数列 $\{s_n\}$ は値 s に $(C,\ 1)$-**総和可能**といい

$$(C,\ 1)\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

と書く．

もし与えられた数列 $\{s_n\}$ が値 s に収束するならば，$(C,\ 1)\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$ であることは次のようにしてわかる．t_n の定義より

$$t_n - s = \frac{(s_0 - s) + (s_1 - s) + \cdots + (s_n - s)}{n+1} \quad (n=0,\ 1 \cdots)$$

は明らかである．任意の $\varepsilon > 0$ に対して適当な k をとれば，すべての $n > k$ に対して $|s_n - s| < \varepsilon$ とできる．いま $|s_0 - s|$, $|s_1 - s|$, $\cdots$, $|s_k - s|$ のう

ち最大のものを M とし，十分大きな $n_0>k$ をとれば，$n>n_0$ に対して $\frac{(k+1)M}{n+1}<\varepsilon$ が成り立つようにできる．このような n については，

$$|t_n-s|\leqq\frac{(k+1)M+\varepsilon(n-k)}{n+1}<2\varepsilon.$$

したがって $\lim_{n\to\infty}t_n=s$ が証明された

また $s_n=(-1)^n$ $(n=0, 1, \cdots)$ とおくと，$\lim_{n\to\infty}s_n$ は存在しないが，$(C, 1)$-$\lim_{n\to\infty}s_n=0$ である．すなわち $(C, 1)$-総和可能な数列の全体は，収束数列の全体を含み，かつ，それより大きいことがわかる．

一般に，数列の全体からなる集合を $\boldsymbol{S}_K$ とし，$\boldsymbol{S}_K$ のある部分集合に属する各数列に一つの有限の数を対応させるような写像 V を**総和法**と名付ける．たとえば数列 $\{s_n\}$ に値 s を対応させるときには

$$V\text{-}\lim_{n\to\infty}s_n=s,$$

あるいは $\{s_n\}$ を部分和の列とする級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ を使って，

$$V\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$$

と書き，数列 $\{s_n\}$（あるいは級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$）は値（または**和**）s に **V-総和可能**という[1]．

総和法は英語では summability method または method of summation, 数列に対しては時には limitation method という．ドイツ語では数列に対しては Limitierungsverfahren, 級数に対しては Summierungsverfahren と区別して使う．

V-総和可能な数列（あるいは級数）の全体からなる集合を総和法 V の**総和域**と名付け，$\mathscr{F}(V)$ と書くことにしよう．もし総和法 V の総和域が，収束数列の全体を部分集合として含むならば，すなわち「$\lim_{n\to\infty}s_n=s$ ならばいつでも V-$\lim_{n\to\infty}s_n=t$」であるならば，総和法 V は**コンザーバティブ**であるという．ここで s と t は異なった数でももちろん差支えないが，特に s と t が同一の値であるような総和法 V を**パーマネント**[2] であるという．

---

1) s を $\{s_n\}$（あるいは $\sum u_n$）の **V-和**ともいう．

2) **レギュラー**ともいう．

前述の $(C, 1)$–総和法は後者の例にもなっている．

二つの総和法 V, W が与えられているとき，「もし $V\text{-}\lim s_n=s$ でかつ $W\text{-}\lim s_n=t$ ならば，いつでも $s=t$」という性質をもつならば，V と W は**共存する**という．これは $\mathscr{F}(V)\cap\mathscr{F}(W)$ に属する任意の数列に対して，V と W が同一の値を対応させることにほかならない．

もし $\mathscr{F}(V)\subseteqq\mathscr{F}(W)$ でかつ V と W が共存するならば，総和法 V は総和法 W より**弱い**，または W は V より**強い**といい $\boldsymbol{V\subseteqq W}$ と書く．ここでさらに，W–総和可能であるが V–総和可能でないような数列がもし存在するならば，$\boldsymbol{V\subset W}$ と書く．$V\subseteqq W$ で，かつ $V\supseteqq W$ であるとき，総和法 V と W は**同値**であるといい $\boldsymbol{V\cong W}$ と書く．

本書では次の記号をしばしば用いる．$f(x)$ は実変数 x の（実数値または複素数値）関数とし，$x=a$ の近傍または $x\to\infty$, $x\to-\infty$ のときを考える．もし，ある関数 $\varphi(x)>0$ に対して，$x=a$ のある近傍でつねに $|f(x)|<H\varphi(x)$ が成立しているとき，$f(x)=O(\varphi(x))$ $(x\to a)$ と書く．ここで H は定数とする．もし $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)/\varphi(x)\}=0$ ならば $f(x)=o(\varphi(x))$ $(x\to a)$ と書き，もし $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)/\varphi(x)\}=s$ ならば $f(x)\cong s\varphi(x)$ $(x\to a)$ と書く．ここで $x\to a$ が明らかであるときは省くこともある．$x\to\infty$, $x\to-\infty$ についても同様である．

数列 $\{a_n\}$ についても同様である．ある実数列 $\{b_n\}$, $b_n>0$ $(n=0, 1, \cdots)$, に対して，もし $|a_n|<Hb_n$ ならば $a_n=O(b_n)$ $(n\to\infty)$ と書き，もし $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$ ならば $a_n=o(b_n)$ $(n\to\infty)$ と書き，もし $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=s$ ならば $a_n\cong sb_n$ $(n\to\infty)$ と書く．ここで $n\to\infty$ はしばしば省く．

数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき，

$$\Delta a_n=a_n-a_{n+1},\qquad \Delta^0 a_n=a_n,$$

$$\Delta^k a_n=\Delta\Delta^{k-1}a_n=\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}a_{n+m}\quad (k=1, 2, \cdots)$$

と定義する．

本書でしばしば大切な役割を演ずる変形に**アーベルの変換**または**アーベルの補助定理**といわれるものがある．すなわち

$$s_n=u_0+\cdots+u_n\quad (n=0, 1, \cdots),\ s_{-1}=0$$

とし，$0 \leqq p \leqq q$ のとき

$$\sum_{n=p}^{q} u_n v_n = \sum_{n=p}^{q-1} s_n (v_n - v_{n+1}) - s_{p-1} v_p + s_q v_q$$

なる式が成り立つ．これは部分積分に対応し，**部分和の公式**ともいう．

本書では「正」を広義に負でない（$\geqq 0$）の意味に用いる．厳密に正（>0）の意味に用いるときには，それを断わることにする．正の整数というときには 0, 1, 2, … をさし，自然数 1, 2, … と区別する．

また関数 $f(x)$ が単調増加であるとは，$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) \leqq f(x_2)$ のときをいう．単調減少についても同様である．

§2.　シルバーマン・テープリッツの定理

前節で総和法の一般的な定義を述べたが，最もよく使われる総和法は，一般に複素数を要素とする無限行列 $A=(a_{n\nu})$[1] を使う次のような型のものである:

（i）　与えられた数列 $\{s_n\}$ に対して，

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu \tag{2.1}$$

はすべての $n=0, 1, \cdots$ に対して収束し，かつ

（ii）
$$\lim_{n\to\infty} t_n = s$$

であるとき，数列 $\{s_n\}$ は値 s に A-総和可能といい $A\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$ と書く．ここでは s もちろん有限の数である．この (2.1) の関係式は，$\boldsymbol{s}=\{s_n\}$，$\boldsymbol{t}=\{t_n\}$ とおくと $\boldsymbol{t}=A\boldsymbol{s}$ と書ける．

上の二つの条件のうち，（i）を満足する数列を **A-適用可能**であるという．また上のようにして定義される総和法は，「行列 A による数列-数列変換で与えられる総和法」，「行列 A によって与えられる**数列-数列型総和法**」あるいは簡単に「総和法 A」といわれる．このような型の総和法に関しては次の基本定理が成り立つ．

定理 2.1.　**（シルバーマン・テープリッツの定理）**　数列 $\{s_n\}$ が値 s に

1)　特に $a_{n\nu}=0$ $(\nu>n)$ であるような行列 $A=(a_{n\nu})$ を**三角行列**といい，また $a_{nn}\neq 0$ $(n=0, 1, \cdots)$ であるような三角行列 A を**真三角行列**という．

収束するとき,

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu$$

がすべての $n=0, 1, \cdots$ に対して収束して，かつ数列 $\{t_n\}$ が同じ値 s に収束するための必要十分条件は,

（i） $$\xi_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \leqq \xi,$$

ここで ξ は n に無関係な有限な数である,

（ii） $$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu}=0 \quad (\nu=0, 1, \cdots),$$

（iii） $$\zeta_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} \text{ とおくと, } \lim_{n\to\infty}\zeta_n=1$$

なることである.

この三つの条件を満足する行列 $A=(a_{n\nu})$ を **T-行列**または**テープリッツ行列**ともいう．この各条件の役割を明らかにするために定理をいくつかの段階に分けて証明しよう.

定理 2.2. 数列 $\{s_n\}$ が有界のとき，つねに $\{t_n\}$ が存在してしかも有界であるための必要十分条件は，各 ξ_n が有限な数で，かつ $\{\xi_n\}$ が有界数列なることである.

証明. 必要条件. まず $\{s_n\}$ として 1, 0, 0, … なる数列をとると，$t_n=a_{n0}$ $(n=0, 1, \cdots)$ で，仮定より数列 $\{a_{n0}\}$ は有界である. 同様にして $\{a_{n1}\}, \{a_{n2}\}, \cdots$ の各々は有界数列である.

次に数列 $\{s_n\}$ として $s_0=\mathrm{sgn}\, a_{00}$, $s_1=\mathrm{sgn}\, a_{01}, \cdots$[2] とすると，$t_0=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{0\nu}|=\xi_0$ は仮定より有限な数である．同様にして $\xi_1, \xi_2, \cdots$ もすべて有限な数であることがわかる．いま，かりに $\{\xi_n\}$ が有界でないと仮定すると，適当に有界数列 $\{s_n\}$ をえらび $\{t_n\}$ が有界でないようにできることを示そう.

$\xi_n \nearrow \infty$ と仮定しても一般性を失わない[3]. 整数列 $\{\mu_n\}, \{k_n\}, \{\lambda_n\}$ を次のようにえらぶ. $\mu_0=0$, $k_0=0$ とし，λ_0 は $\lambda_0>k_0+1$ であって，かつ $\sum_{\nu=\lambda_0}^{\infty}|a_{0\nu}|\leqq 1$ であるような最小の整数とする．いま $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{m-1}$; $k_0, k_1,$

---

2) 複素数 z に対しては $\mathrm{sgn}\, z=|z|/z$ $(z\neq 0)$, $\mathrm{sgn}\, 0=0$ と定義する.

3) もしそうでないときには，$\xi_{n_p}\nearrow\infty$ であるような部分列 $\{\xi_{n_p}\}$ をえらぶ.

$\cdots, k_{m-1}$; $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}$ まで得られたとき，μ_m, k_m, λ_m は次のようにえらぶ．まず μ_m は $\mu_m>\mu_{m-1}$ で，かつある $k>\lambda_{m-1}$ に対して

$$\sum_{\nu=0}^{k}|a_{\mu\nu}|\leqq\frac{1}{3}\xi_\mu-1 \tag{2.2}$$

であるような最小の整数 μ を μ_m とする．このような μ_m の存在は，$\xi_n \nearrow \infty$ とすでに述べた行列 A の各列の有界性とからわかる．k_m は (2.2) が成り立つような，ある k（たとえば $k_m=\lambda_{m-1}+1$）とする．

最後に λ_m は $\lambda_m>k_m+1$ であって，かつ

$$\sum_{\nu=\lambda_m}^{\infty}|a_{\mu_m\nu}|\leqq1$$

であるような最小の整数とする．このようにして三つの単調増加数列 $\{\mu_n\}$, $\{k_n\}$, $\{\lambda_n\}$ が得られた．しかも

$$k_0<\lambda_0<k_1<\lambda_1<k_2<\lambda_2<\cdots$$

なる大小関係がある．

以上の準備の下で，$\{s_n\}$ は有界であるが $\{t_n\}$ は有界でないような例をつくろう．

$$s_\nu=\begin{cases}\operatorname{sgn} a_{\mu\nu}, & \text{ただし } k_n<\nu<\lambda_n,\ \mu=\mu_n,\\ 0, & \text{それ以外 } (\lambda_{n-1}\leqq\nu\leqq k_n)\end{cases}$$

とおくと，$\mu=\mu_n$ に対して

$$\begin{aligned}|t_\mu|&=\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{\mu\nu}s_\nu\right|\geqq\sum_{\nu=k_n+1}^{\lambda_n-1}|a_{\mu\nu}|-\sum_{\nu=0}^{k_n}|a_{\mu\nu}|-\sum_{\nu=\lambda_n}^{\infty}|a_{\mu\nu}|\\&=\xi_\mu-2\sum_{\nu=0}^{k_n}|a_{\mu\nu}|-2\sum_{\nu=\lambda_n}^{\infty}|a_{\mu\nu}|\\&\geqq\xi_\mu-2\left(\frac{1}{3}\xi_\mu-1\right)-2=\frac{1}{3}\xi_\mu,\end{aligned}$$

よって $n\to\infty$ のとき $|t_{\mu_n}|\to\infty$ となり，変換数列 (2.1) は有界でない．

十分条件．もし $0\leqq\xi_n\leqq\xi$ $(n=0, 1, \cdots)$ とすると，有界数列 $\{s_n\}$ に対して

$$|t_n|\leqq\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}||s_\nu|\leqq H\xi\quad(n=0, 1, \cdots),$$

ここで $|s_n|\leqq H$ $(n=0, 1, \cdots)$ とする．　(証明終)

定理 2.3.　数列 $\{s_n\}$ が 0 に収束するとき，つねに $\{t_n\}$ が存在して，

かつ収束するための必要十分条件は,

（i） $\{\xi_n\}$ は有界数列で,

（ii′） $$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu}=\alpha_\nu \quad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

なることである．ここで α_ν はすべて有限な数で，かつ，このときには

$$\lim_{n\to\infty} t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu s_\nu.$$

証明. 必要条件．まず（ii′）を示すには数列 $\{s_n\}$ として

$$s_0=1,\ \ s_1=s_2=\cdots=0$$

とすると，$t_n=a_{n0}$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$．仮定より $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n0}$ の収束がわかる．同様にして $\{s_n\}$ として

$$s_0=s_1=\cdots=s_{\nu-1}=0,\quad s_\nu=1,\quad s_{\nu+1}=s_{\nu+2}=\cdots=0$$

とすると，$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n\nu}$ の収束がわかる．

次に（i）を示そう．そのために一つの定理を証明する．

定理 2.4. **（アーベル・ディニの定理**[4]**）** もし $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} d_\nu=\infty$, $d_\nu\geqq 0$ $(\nu=0,\ 1,\ \cdots)$ ならば,

$$D_\nu=d_0+d_1+\cdots+d_\nu$$

とおくとき $\sum\limits_{\nu=p}^{\infty} d_\nu/D_\nu=\infty$ である． ここで p は，$d_\nu\neq 0$ である最初の指標とする．

証明. 任意の $\nu\geqq p$ に対して

$$\frac{d_{\nu+1}}{D_{\nu+1}}+\cdots+\frac{d_{\nu+k}}{D_{\nu+k}}\geqq\frac{d_{\nu+1}+\cdots+d_{\nu+k}}{D_{\nu+k}}=1-\frac{D_\nu}{D_{\nu+k}}$$

で，かつ $D_n\nearrow\infty$ なるゆえ， $k=k_\nu$ を十分大きくすると $D_\nu/D_{\nu+k}<\dfrac{1}{2}$ とできる．ゆえに

$$\frac{d_{\nu+1}}{D_{\nu+1}}+\cdots+\frac{d_{\nu+k}}{D_{\nu+k}}>\frac{1}{2},$$

よってアーベル・ディニ定理は証明された.

さて，いまある n に対して $\xi_n=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|=\infty$ と仮定する．いま証明した定理で d_ν の代りに $|a_{n\nu}|$ とおき，また

---

4) アーベル・ディニの定理はもっと多くを述べているが， 本書で入用な部分だけを引用する.

$$\varepsilon_\nu=\left(\sum_{m=p}^{\nu}|a_{nm}|\right)^{-1}\quad(\nu\geqq p)$$

とおくと，$\lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu=0$ で $\sum_{\nu=p}^{\infty}\varepsilon_\nu|a_{n\nu}|=\infty$ である．いま

$$s_\nu=\begin{cases}\varepsilon_\nu\,\mathrm{sgn}\,a_{n\nu} & (\nu=p,\ p+1,\ \cdots),\\ 0 & (\nu=0,\ 1,\ \cdots,\ p-1)\end{cases}$$

とおくと，$\lim_{\nu\to\infty}s_\nu=0$ でかつ

$$t_n=\sum_{\nu=p}^{\infty}\varepsilon_\nu|a_{n\nu}|=\infty$$

となり矛盾である．よって，すべての n に対して ξ_n は有限の数である．

次に数列 $\{\xi_n\}$ が有界であることを示すには，定理 2.2 と同様背理法による．すなわち $\xi_n\nearrow\infty$ と仮定して，整数列 $\{\mu_n\}$, $\{k_n\}$, $\{\lambda_n\}$ をつくり[5]，

$$s_\nu=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{sgn}\,a_{\mu\nu}}{\sqrt{\xi_\mu}}, & \text{ただし } k_n<\nu<\lambda_n,\ \mu=\mu_n,\\ 0, & \text{それ以外 } (\lambda_{n-1}\leqq\nu\leqq k_n)\end{cases}$$

とおくと，$\lim_{\nu\to\infty}s_\nu=0$ で，かつ前と同様にして $\mu=\mu_n$ に対して

$$|t_\mu|\geqq\frac{1}{3}\sqrt{\xi_\mu}$$

を得る．$n\to\infty$ とすると，この右辺は $\to\infty$ となり，変換数列 (2. 1) は有界でない．

十分条件．いま $\delta_k=\sup_{\nu\geqq k}|s_\nu|$ とおくと，

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}s_\nu=\sum_{\nu=0}^{k}a_{n\nu}s_\nu+\sum_{\nu=k+1}^{\infty}a_{n\nu}s_\nu$$

より，

$$\left|t_n-\sum_{\nu=0}^{k}a_{n\nu}s_\nu\right|\leqq\sum_{\nu=k+1}^{\infty}|a_{n\nu}||s_\nu|\leqq\xi\delta_k,$$

ここで $0\leqq\xi_n\leqq\xi$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$．ゆえに

$$\sum_{\nu=0}^{k}a_{n\nu}s_\nu-\xi\delta_k\leqq t_n\leqq\sum_{\nu=0}^{k}a_{n\nu}s_\nu+\xi\delta_k.$$

ここで $n\to\infty$ とすると，(ii′) より

$$\sum_{\nu=0}^{k}\alpha_\nu s_\nu-\xi\delta_k\leqq\varliminf_{n\to\infty}t_n\leqq\varlimsup_{n\to\infty}t_n\leqq\sum_{\nu=0}^{k}\alpha_\nu s_\nu+\xi\delta_k.$$

---

5)　定理 2. 2 のときと大体同様である．読者に任せよう．

数列 $\{s_n\}$ が0に収束するならば $\delta_k \searrow 0$ で，さらに $\{t_n\}$ は有界数列である．ゆえに $\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu s_\nu$ は収束して[6)]，かつ

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu s_\nu$$

である．　(証明終)

定理 2.5. 数列 $\{s_n\}$ が 0 に収束するとき，つねに $\{t_n\}$ が存在して，かつ 0 に収束するための必要十分条件は，

(i) $\{\xi_n\}$ は有界数列で，

(ii) $$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu}=0 \quad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

なることである．

証明. 必要条件. 定理 2.3 より (i) は明らか．また，ある $\nu=p$ について $\lim_{n\to\infty} a_{np}=\alpha_p \neq 0$ と仮定すると，

$$s_0=s_1=\cdots=s_{p-1}=0,\ s_p=1,\ s_{p+1}=s_{p+2}=\cdots=0$$

なる数列 $\{s_n\}$ は 0 に収束するが，定理 2.3 により $\lim_{n\to\infty} t_n=\alpha_p\neq 0$ となり矛盾がおこる．十分条件の証明は明らか．　(証明終)

定理 2.6. 数列 $\{s_n\}$ が値 s に収束するとき，つねに $\{t_n\}$ が存在して，かつ収束するため必要十分条件は，

(i) $\{\xi_n\}$ は有界数列で，

(ii′) $$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu}=\alpha_\nu \quad (\nu=0,\ 1,\ \cdots),$$

(iii′) 数列 $\{\zeta_n\}$ は収束する

ことである．かつ，このときには

$$\lim_{n\to\infty} t_n = s\lim_{n\to\infty}\zeta_n + \sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu(s_\nu - s) \tag{2.3}$$

である．

証明. 必要条件．定理 2.3 より (i)，(ii′) は明らか．また数列 $\{s_n-s\}$ は 0 に収束するゆえ，同じ定理より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}(s_\nu - s) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu(s_\nu - s)$$

---

6) 条件 (i)，(ii′) があれば $\sum_{\nu=0}^{\infty}|\alpha_\nu|$ が収束し，ゆえに有界数列 $\{s_n\}$ に対して $\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu s_\nu$ が収束することは直接にも示される．定理 3.4 の証明参照．

は収束する．他方，本定理の仮定より，$n=0, 1, \cdots$ に対して $t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu$ は収束して，かつ数列 $\{t_n\}$ は収束するゆえ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}(s_\nu-s)-\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu=-s\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}$$

は収束する．すなわち数列 $\{\zeta_n\}$ は収束する．また上の二つの式を組み合わせると (2.3) が得られる．

十分条件．もし (i), (ii′) が満足されるならば，定理 2.3 より，値 s に収束する任意の数列 $\{s_n\}$ に対して $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}(s_\nu-s)$ $(n=0, 1, \cdots)$ は有限確定で，かつ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}(s_\nu-s)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu(s_\nu-s)$$

である．他方 (iii′) より，この左辺は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}(s_\nu-s)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu-s\lim_{n\to\infty}\zeta_n.$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu$ は値 $\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu(s_\nu-s)+s\lim_{n\to\infty}\zeta_n$ に収束する．（証明終）

以上の準備の下で定理 2.1 の証明をしよう．必要条件．定理 2.5 より，(i), (ii) は明らか．これと定理 2.6 とから (iii) がでる．

十分条件．定理 2.6 から明らか．（定理 2.1 の証明終）

次に $a_\nu(x)$ $(\nu=0, 1, \cdots)$ は実数 x のある集合 E で定義された関数列とし，点 ω は E の集積点とする．数列 $\{s_n\}$ が与えられたとき，

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(x)s_\nu$$

がすべての $x\in E$ に対して収束して，かつ

$$\lim_{\substack{x\to\omega\\ x\in E}} f(x)$$

が収束するとき，ここに一つの総和法が定義される．このようにして定義される総和法を「関数列 $\{a_\nu(x)\}$ による数列－関数変換で与えられる総和法」という．この総和法は前述の「行列 $A=(a_{n\nu})$ による数列－数列変換で与えられる総和法」と極めてよく似た性質をもつため，「列が連続である行列によって与えられる総和法」ということもある．たとえばシルバーマン・テープリッツの定理に対応して次の定理が成立し，その証明も全く同様である．

定理 2.7. 数列 $\{s_n\}$ が値 s に収束するとき，

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(x)s_\nu$$

がすべての $x\in E$ に対して収束して，かつ $\lim_{\substack{x\to\omega\\x\in E}}f(x)=s$ であるための必要十分条件は，

(i) $$\xi(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu(x)|\leqq\xi,$$

ここで ξ は x に無関係な有限数，

(ii) $$\lim_{\substack{x\to\omega\\x\in E}}a_\nu(x)=0\quad(\nu=0,\ 1,\ \cdots),$$

(iii) $$\zeta(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(x)\ とおくと，\ \lim_{\substack{x\to\omega\\x\in E}}\zeta(x)=1$$

なることである．

§3. シュタインハウスの定理，ゴフマン・ピータースンの定理，シュアーの定理

前節では行列 A による数列－数列型総和法がパーマネントであるための必要十分条件を与えた．ここで次のような疑問がおこる．適当に T-行列 A を与えると，すべての数列，あるいは少なくともすべての有界数列が A-総和可能となるであろうか．これに答えるのが次の定理である．簡単のために本節では行列，数列はすべて実数からなるとする（演習問題1　問6参照）．

定理 3.1. **（シュタインハウスの定理）** 任意の T-行列 $A=(a_{n\nu})$ を与えるとき，A-総和可能でないような有界数列がいつでも存在する．

証明. シルバーマン・テープリッツの定理の条件 (iii) より，適当に正の整数 n_1 をえらぶと

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n_1\nu}>\frac{3}{4}$$

とできる．さらに適当に正の整数 m_1 をえらぶと，条件 (i) より

$$\sum_{\nu=m_1+1}^{\infty}|a_{n_1\nu}|<\frac{1}{12}$$

とできる．いま数列 $\{s_\nu\}$ として

$$\begin{cases} s_\nu=1, & \text{ただし}\quad 0\leqq\nu\leqq m_1, \\ 0\leqq s_\nu\leqq 1, & \text{それ以外のすべての } \nu \text{ に対して}, \end{cases}$$

とすると，

$$t_{n_1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n_1\nu}s_\nu=\sum_{\nu=0}^{m_1}a_{n_1\nu}+\sum_{\nu=m_1+1}^{\infty}a_{n_1\nu}s_\nu$$

で，この右辺第2項は

$$\sum_{\nu=m_1+1}^{\infty}a_{n_1\nu}s_\nu\geqq\sum_{\nu=m_1+1}^{\infty}\{a_{n_1\nu}-|a_{n_1\nu}|\}s_\nu$$

$$\geqq\sum_{\nu=m_1+1}^{\infty}\{a_{n_1\nu}-|a_{n_1\nu}|\}.$$

ゆえに

$$t_{n_1}\geqq\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n_1\nu}-\sum_{\nu=m_1+1}^{\infty}|a_{n_1\nu}|>\frac{3}{4}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}.$$

次に条件（ii）より，適当に $n_2>n_1$ をとり

$$\sum_{\nu=0}^{m_1}|a_{n_2\nu}|<\frac{1}{6}$$

とする．条件（i）より適当に $m_2>m_1$ をとり

$$\sum_{\nu=m_2+1}^{\infty}|a_{n_2\nu}|<\frac{1}{6}$$

とする．いま

$$s_\nu=0,\ \text{ただし}\ m_1<\nu\leqq m_2$$

とすると

$$t_{n_2}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n_2\nu}s_\nu\leqq\sum_{\nu=0}^{m_1}|a_{n_2\nu}|+\sum_{\nu=m_2+1}^{\infty}|a_{n_2\nu}|<\frac{1}{3}.$$

次に条件（iii）と（ii）より，適当に $n_3>n_2$ をとり

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n_3\nu}>\frac{3}{4},$$

かつ

$$\sum_{\nu=0}^{m_2}|a_{n_3\nu}|<\frac{1}{24}$$

とできる．さらに条件（i）より，適当に $m_3>m_2$ をとり

$$\sum_{\nu=m_3+1}^{\infty}|a_{n_3\nu}|<\frac{1}{24}$$

とできる．いま

$$s_\nu=1,\ \text{ただし}\quad m_2<\nu\leqq m_3$$

とすると，

$$\begin{aligned}
t_{n_3}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n_3\nu}s_\nu&=\sum_{\nu=0}^{m_1}a_{n_3\nu}+\sum_{\nu=m_2+1}^{m_3}a_{n_3\nu}+\sum_{\nu=m_3+1}^{\infty}a_{n_3\nu}s_\nu\\
&=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n_3\nu}-\sum_{\nu=m_1+1}^{\infty}a_{n_3\nu}+\sum_{\nu=m_2+1}^{m_3}a_{n_3\nu}+\sum_{\nu=m_3+1}^{\infty}a_{n_3\nu}s_\nu\\
&=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n_3\nu}-\sum_{\nu=m_1+1}^{m_2}a_{n_3\nu}-\sum_{\nu=m_3+1}^{\infty}a_{n_3\nu}+\sum_{\nu=m_3+1}^{\infty}a_{n_3\nu}s_\nu\\
&\geqq\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n_3\nu}-\sum_{\nu=m_1+1}^{m_2}|a_{n_3\nu}|-\sum_{\nu=m_3+1}^{\infty}a_{n_3\nu}(1-s_\nu)\\
&\geqq\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n_3\nu}-\sum_{\nu=m_1+1}^{m_2}|a_{n_3\nu}|-\sum_{\nu=m_3+1}^{\infty}|a_{n_3\nu}|\\
&>\frac{3}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{24}=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

このような操作を繰り返すと，数列 $\{s_n\}$ は有界であるが，変換数列 $\{t_n\}$ は収束しない．　(証明終)

すでに証明されたように，いかなる T-行列を与えてもすべての有界数列を総和することはできないが，しかし任意に有界数列を与えるとき，その数列を総和するような T-行列が存在することは，次のように容易にわかる．

与えられた数列 $\{s_\nu\}$ は有界数列であるゆえ，適当に部分列 $\{s_{\nu_k}\}$ をとると，値 s に収束する．いま行列 $A=(a_{n\nu})$ を次のように定義する:

$$a_{n\nu}=\begin{cases}1,\ \text{ただし}\ \nu=\nu_n\ \ (n=0,\ 1,\ \cdots),\\ 0,\ \text{それ以外のすべて}.\end{cases}$$

すると

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}s_\nu=s_{\nu_n}\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots).$$

よって $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_{\nu_n}=s$. 行列 A が T-行列であることは明らかである．

さらに次の二つの定理からわかるように，T-行列のある集合を適当にとると，それらによって与えられる数列－数列型総和法の全体は，有界数列に対して互いに共存していて，かつ任意の有界数列はそれに属するある総和法

によって総和可能である．

定理 3.2. **(ゴフマン・ピータースンの定理)**　次のような T-行列 $A=(a_{n\nu})$ の全体からなる集合を $\boldsymbol{Q}$ とする:

(i)　　　　　$a_{n\nu}\geqq 0\quad(n,\ \nu=0,\ 1,\ \cdots)$,

(ii)　任意の n に対して $a_{n\nu}=\frac{1}{2}$ であるような ν が存在する,

(iii)　任意の ν に対して $a_{n\nu}=\frac{1}{2}$ であるような n が存在する．

すると任意に有界数列 $\{s_n\}$ が与えられたとき，$A\text{-}\lim_{n\to\infty}s_n$ が存在するような行列 $A\in\boldsymbol{Q}$ が存在する．

証明． $\underline{\lim}_{n\to\infty}s_n=L$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}s_n=U$ とおくと，

$$\alpha_n\geqq 0,\qquad \beta_n\geqq 0,\qquad \alpha_n+\beta_n=\frac{1}{2}\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots),$$

かつ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}s_n+\alpha_nL+\beta_nU\right)=\frac{1}{2}(L+U)$$

であるような二つの数列 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ が存在することをまず示そう．

L, U の定義より

$$L-\varepsilon_n\leqq s_n\leqq U+\varepsilon_n\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるような，$\varepsilon_n>0$, $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ なる数列 $\{\varepsilon_n\}$ が存在する．ゆえに任意の $n=0,\ 1,\ \cdots$ に対して

$$\lambda_n\geqq 0,\qquad \mu_n\geqq 0,\qquad \lambda_n+\mu_n=1,$$

かつ

$$s_n=\lambda_n(L-\varepsilon_n)+\mu_n(U+\varepsilon_n)$$

なる λ_n, μ_n が存在する．いま

$$\alpha_n=\frac{1}{2}(1-\lambda_n),\qquad \beta_n=\frac{1}{2}(1-\mu_n)\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}s_n+\alpha_nL+\beta_nU\right)=\frac{1}{2}(L+U)$$

である．

さて二つの単調増加整数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, ただし $p_n\nearrow\infty$, $q_n\nearrow\infty$, を

$$\lim_{n\to\infty} s_{p_n}=L, \quad \lim_{n\to\infty} s_{q_n}=U,$$

$$p_n \neq n, \quad q_n \neq n, \quad p_n \neq q_n \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

であるようにえらぶ．さらに行列 $A=(a_{n\nu})$ を次のように定義する： $n=0, 1, \cdots$ に対し

$$a_{n\nu}=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{ただし} \quad \nu=n, \\ \alpha_n, & \text{ただし} \quad \nu=p_n, \\ \beta_n, & \text{ただし} \quad \nu=q_n, \\ 0, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

すると $A \in \boldsymbol{Q}$ で，かつ

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu=\frac{1}{2} s_n+\alpha_n s_{p_n}+\beta_n s_{q_n}$$

なるゆえ $\lim_{n\to\infty} t_n=\frac{1}{2}(L+U)$ である．　（証明終）

定理 3.3. **（ゴフマン・ピータースンの定理）**　もし $A \in \boldsymbol{Q}$ で，かつ有界数列 $\{s_n\}$ が A-総和可能であるならば，

$$A\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{2}(L+U)$$

である．ここで $L=\varliminf_{n\to\infty} s_n$，$U=\varlimsup_{n\to\infty} s_n$ とする．

証明． まず $L>0$ と仮定する．

$$\lim_{n\to\infty} s_{p_n}=L, \quad \lim_{n\to\infty} s_{q_n}=U$$

なる二つの単調増加整数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$，ただし $p_n \nearrow \infty$，$q_n \nearrow \infty$ をえらぶ．$A \in \boldsymbol{Q}$ なるゆえ，(iii) より任意の n に対して

$$a_{r_n p_n}=\frac{1}{2}$$

なる整数 r_n が存在する．また A は T-行列であるから，数列 $\{r_n\}$ は有界でない．なぜならば，もしそうでないとすると r_n のある値，たとえば λ は無限回現れる．すると $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\lambda\nu}$ は発散し T-行列の条件 (i) に反する．さらに $r_n \nearrow \infty$ となるように $\{p_n\}$ をとることができる．

$$t_{r_n}=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{r_n\nu} s_\nu=\frac{1}{2} s_{p_n}+\sum_{\nu \neq p_n} a_{r_n\nu} s_\nu \tag{3.1}$$

を考える．T-行列の条件（iii）より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu\neq p_n}a_{r_n\nu}=\frac{1}{2}$$

である．ゆえに任意の $\varepsilon>0$ に対して，適当に n_1 をとれば

$$\sum_{\nu\neq p_n}a_{r_n\nu}<\frac{1}{2}+\varepsilon \qquad (n>n_1)$$

である．また適当に ν_1 をとれば

$$s_\nu<U+\varepsilon \qquad (\nu>\nu_1)$$

である．T-行列の条件（ii）より，適当に n_2 をとれば

$$\sum_{0\leqq\nu\leqq\nu_1}a_{r_n\nu}<\varepsilon \qquad (n>n_2)$$

である．いま $H=\sup|s_\nu|$ とおくと，$n>\max(n_1,\ n_2)$ に対して

$$\sum_{\nu\neq p_n}a_{r_n\nu}s_\nu=\Bigl(\sum_{0\leqq\nu\leqq\nu_1}+\sum_{\substack{\nu>\nu_1\\ \nu\neq p_n}}\Bigr)a_{r_n\nu}s_\nu<\varepsilon H+\Bigl(\frac{1}{2}+\varepsilon\Bigr)(U+\varepsilon)$$

である．$\{s_n\}$ は A-総和可能であるから，(3.1) と上式とから

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}t_{r_n}\leqq\frac{1}{2}(L+U)$$

がわかる．

次に $A\in\boldsymbol{Q}$ なるゆえ，定理 3.2 の（iii）より任意の n に対して

$$a_{m_nq_n}=\frac{1}{2}$$

なる整数 m_n が存在する．A が T-行列であることから，上と同様にして $m_n\nearrow\infty$ とできる．さらに

$$\sum_{\nu\neq q_n}a_{m_n\nu}s_\nu>-\varepsilon H+\Bigl(\frac{1}{2}-\varepsilon\Bigr)(L-\varepsilon),$$

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}t_{m_n}\geqq\frac{1}{2}(L+U)$$

である．

次に一般の L に対しては，適当な定数 c をえらび

$$\varliminf_{n\to\infty}(s_n+c)=L^*>0,\qquad \varlimsup_{n\to\infty}(s_n+c)=U^*>0$$

とできる．いま $s_n{}^*=s_n+c$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ とおくと，$\{s_n\}$ が A-総和可能であることから $\{s_n{}^*\}$ も A-総和可能となり，かつ，いま証明したことから

$A\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n{}^* = \frac{1}{2}(L^*+U^*)$ である．A は T-行列であるから

$$A\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = A\text{-}\lim_{n\to\infty}(s_n{}^*-c) = \frac{1}{2}(L^*+U^*)-c = \frac{1}{2}(L+U)$$

となり，この場合にも定理は成り立つ．　(証明終)

すでに述べたように，どのような T-行列をとっても，すべての有界数列を収束数列に変換することはできない．しかし行列の条件を少し変えるとこのことは可能である．たとえばすべての要素が 0 である行列（零行列）がそうである．このようにすべての有界数列を収束数列に変換する行列を一般に**シュアー行列**という．これに関して次の定理が成り立つ．

定理 3. 4. **（シュアーの定理）** 行列 $A=(a_{n\nu})$ がシュアー行列であるための必要十分条件は，

（i） $\xi_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|$ はすべての $n=0, 1, \cdots$ に対して収束して，かつ，この収束は n に関して一様である．

（ii） $$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu}=\alpha_\nu \qquad (\nu=0, 1, \cdots),$$

ここで α_ν はすべて有限な数である．

証明. 必要条件．（ii）については，数列 $\{s_n\}$ として

$$s_0=s_1=\cdots=s_{\nu-1}=0, \qquad s_\nu=1, \qquad s_{\nu+1}=s_{\nu+2}=\cdots=0$$

とすると，$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu}$ の収束がわかる．

次に（i）を示そう．定理 2.2 より

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|\leqq\xi \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

である．ゆえに任意の p に対して

$$\sum_{\nu=0}^{p}|a_{n\nu}|\leqq\xi \qquad (n=0, 1, \cdots),$$

さらに $n\to\infty$ により $\sum_{\nu=0}^{p}|\alpha_\nu|\leqq\xi$，したがって

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|\alpha_\nu|\leqq\xi$$

がわかる．いま

$$b_{n\nu}=a_{n\nu}-\alpha_\nu \qquad (n, \nu=0, 1, \cdots)$$

により行列 $B=(b_{n\nu})$ を定義すると，

(3.2)
$$\lim_{n\to\infty} b_{n\nu}=0 \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots),$$
$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|b_{n\nu}|\leqq 2\xi \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$
である．さらに任意の有界数列 $\{s_n\}$ に対して
$$t_n{}^*=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_{n\nu}s_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}s_\nu-\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu s_\nu=t_n-\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu s_\nu$$
である．ここで $\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu s_\nu$ は収束し，かつ n に無関係であるから，$\lim_{n\to\infty} t_n{}^*$ も収束する．したがって B もシュアー行列である．

もし $\sum_{\nu=0}^{\infty}|b_{n\nu}|$ が n に関して一様に収束することが示されるならば，すなわち任意の $\varepsilon>0$ に対して適当に整数 τ をとると
$$\sum_{\nu=\tau}^{\infty}|b_{n\nu}|<\varepsilon \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$
であることがもし示されるならば，$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|$ も n に関して一様に収束することがわかり，必要条件の証明が終る．

いま，かりに $\sum_{\nu=0}^{\infty}|b_{n\nu}|$ が一様収束しないと仮定すると，適当に $\varepsilon_0>0$ をとると任意の整数 τ に対して
$$\sum_{\nu=\tau}^{\infty}|b_{\mu_j(\tau),\nu}|>4\varepsilon_0 \qquad (j=0,\ 1,\ \cdots)$$
なる整数の無限列 $\{\mu_j(\tau)\}$ が存在する．このことと (3.2) とから，単調増加する整数列 $\{\tau_k\}$, $\{n_k\}$ を次のようにつくる．

$\tau_0=0$ とし，n_0 を十分大きくとり
$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|b_{n_0\nu}|>4\varepsilon_0,\quad |b_{n_0 0}|<\varepsilon_0$$
であるようにする．一般に τ_k をえらんだとき，$n_k(>n_{k-1})$ を
$$\sum_{\nu=\tau_k+1}^{\infty}|b_{n_k\nu}|>4\varepsilon_0, \qquad \sum_{\nu=0}^{\tau_k}|b_{n_k\nu}|<\varepsilon_0.$$
であるようにえらぶ．

$\sum_{\nu=0}^{\infty}|b_{n_k\nu}|<\infty$ なるゆえ，$\tau_{k+1}(>\tau_k)$ は
$$\sum_{\nu=\tau_{k+1}+1}^{\infty}|b_{n_k\nu}|<\varepsilon_0$$
であるようにえらぶ．すると

$$\sum_{\nu=\tau_k+1}^{\tau_{k+1}} |b_{n_k\nu}| > 3\varepsilon_0.$$

いま, 数列 $\{s_\nu\}$ を

$$s_\nu = \begin{cases} (-1)^k \operatorname{sgn} b_{n_k\nu}, & \text{ただし } \tau_k+1 \leqq \nu \leqq \tau_{k+1}, \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

とおくと $|s_\nu| \leqq 1$ で, かつ偶数の k に対しては

$$t^*_{n_k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n_k\nu} s_\nu \geqq \left(-\sum_{\nu=0}^{\tau_k} + \sum_{\nu=\tau_k+1}^{\tau_{k+1}} - \sum_{\nu=\tau_{k+1}+1}^{\infty} \right) |b_{n_k\nu}| > \varepsilon_0$$

である. 同様に奇数の k に対しては

$$t^*_{n_k} \leqq \left(\sum_{\nu=0}^{\tau_k} - \sum_{\nu=\tau_k+1}^{\tau_{k+1}} + \sum_{\nu=\tau_{k+1}+1}^{\infty} \right) |b_{n_k\nu}| < -\varepsilon_0$$

である. したがって数列 $\{t_{n_k}{}^*\}$ は発散する. これは B がシュアー行列であることに矛盾する.

十分条件. 行列 A が (i), (ii) を満足し, 数列 $\{s_n\}$ は $|s_n| \leqq H$ $(n=0, 1, \cdots)$ とすると, 任意の $n=0, 1, \cdots$ に対して $t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ は収束する. 数列 $\{t_n\}$ が収束をすることを示したい.

(i) より, 任意の $\varepsilon>0$ に対して適当に p をえらぶと

$$\left| t_n - \sum_{\nu=0}^{p} a_{n\nu} s_\nu \right| < \varepsilon, \qquad n=0, 1, \cdots$$

とできる. (ii) より適当に N をえらぶと, $n_1, n_2 > N$ なる任意の n_1, n_2 に対して

$$\left| \sum_{\nu=0}^{p} a_{n_1\nu} s_\nu - \sum_{\nu=0}^{p} a_{n_2\nu} s_\nu \right| \leqq H \sum_{\nu=0}^{p} |a_{n_1\nu} - a_{n_2\nu}| < \varepsilon$$

とできる. ゆえに

$$|t_{n_1} - t_{n_2}| \leqq \left| t_{n_1} - \sum_{\nu=0}^{p} a_{n_1\nu} s_\nu \right| + \left| \sum_{\nu=0}^{p} a_{n_1\nu} s_\nu - \sum_{\nu=0}^{p} a_{n_2\nu} s_\nu \right| + \left| \sum_{\nu=0}^{p} a_{n_2\nu} s_\nu - t_{n_2} \right| < 3\varepsilon$$

である. よって数列 $\{t_n\}$ は収束する. (証明終)

この定理とシルバーマン・テープリッツの定理とから本節はじめに述べたシュタインハウスの定理が容易に導かれる.

系. 任意の T-行列はシュアー行列ではありえない.

証明.　もし $A=(a_{n\nu})$ が T-行列とすると，T-行列の条件（ii）より

$$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu}=\alpha_\nu=0 \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．いま，かりに A がシュアー行列でもあると仮定すると，$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}$ は $n=0,\ 1,\ \cdots$ に関して一様に収束する．ゆえに[1]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu=0.$$

他方 T-行列の条件（iii）より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}=\lim_{n\to\infty}\zeta_n=1$$

でなければならない．これは矛盾である．　　　　（証明終）

§4.　級数－数列型総和法

§2, §3 では数列－数列変換によって定義される総和法を取扱った．本節では級数－数列変換によって定義される総和法を考える．

無限行列 $B=(b_{n\nu})$ が与えられているとする．与えられた級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ に対して，

（i）　　$t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}u_\nu$

はすべての $n=0,\ 1,\ \cdots$ に対して収束し，かつ

（ii）　数列 $\{t_n\}$ は収束する．

このようにして一つの総和法が定義される．上の二つの条件のうち（i）はすでに §2 で定義した用語を使うと「$\{u_n\}$ は B-適用可能」ということができる．また上のようにして定義される総和法は「行列 B による級数－数列変換で与えられる総和法」あるいは「行列 B によって与えられる**級数－数列型総和法**」といわれる．§2 のシルバーマン・テープリッツの定理に相当する定理をこの型の総和法について証明するために，まず次の定理を証明しよう．

定理 4.1.　任意の収束級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ に対して，もし

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}u_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

1）たとえば高木〔1〕171 ページ以後参照．

がすべて収束するならば，すべての固定した $n=0, 1, \cdots$ に対して，数列 $\{b_{n\nu}\}$ は $\nu\to\infty$ のとき有界である．

証明． いま，かりにある $n=m$ に対して $\{b_{m\nu}\}$ は $\nu\to\infty$ で有界でないと仮定すると，

$$|b_{m\nu_k}|>k^2 \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

であるような整数列 $\{\nu_k\}$ が存在する．数列 $\{u_\nu\}$ を

$$u_\nu=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sgn} b_{m\nu_k}}{k^2}, & \text{ただし } \nu=\nu_k,\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$$

とおくと，

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|u_\nu|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

$$t_m=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_{m\nu}u_\nu=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|b_{m\nu_k}|}{k^2}=\infty$$

となる．　(証明終)

次の定理は数列－数列型総和法における定理 2.6 に対応する．

定理 4.2.　級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ が値 s に収束するとき，つねに

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_{n\nu}u_\nu \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

が収束して，かつ数列 $\{t_n\}$ が収束するための必要十分条件は，

(i)　すべての $n=0, 1, \cdots$ に対して

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|b_{n\nu}-b_{n,\nu+1}|\leqq M$$

であるような，n に無関係な有限な数 M が存在して，

(ii)　$$\lim_{n\to\infty}b_{n\nu}=\beta_\nu \qquad (\nu=0, 1, \cdots)$$

なることである．ここで β_ν はすべて有限の数である．このときには

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\beta_0 s+\sum_{\nu=0}^{\infty}(\beta_\nu-\beta_{\nu+1})(s_\nu-s)$$

である．ここで $s_\nu=u_0+u_1+\cdots+u_\nu$ とする．

証明． 必要条件．任意に固定した $p=0, 1, \cdots$ に対して

$$u_p=1; \quad u_\nu=0, \quad \text{ただし} \quad \nu\neq p$$

とおくと，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n=1$ で $t_n=b_{np}$ となる．仮定より $\lim_{n\to\infty} b_{np}$ は収束するから，条件（ii）は明らかである．

次に任意の $n=0, 1, \cdots$ に対して

$$\sum_{\nu=0}^{k} b_{n\nu}u_\nu=\sum_{\nu=0}^{k} b_{n\nu}\{(s_\nu-s)-(s_{\nu-1}-s)\}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{k-1} (b_{n\nu}-b_{n,\nu+1})(s_\nu-s)+b_{n0}s+b_{nk}(s_k-s)$$

が成り立つ．前定理より，任意に固定した n に対して

$$|b_{nk}|\leqq B_n \qquad (k=0, 1, \cdots)$$

である．ここで B_n は n だけに依存する．よって $k\to\infty$ のとき

$$|b_{nk}(s_k-s)|\leqq B_n|s_k-s|\to 0$$

である．ゆえに仮定より，$\lim_{\nu\to\infty} s_\nu=s$ なるすべての数列 $\{s_\nu\}$ に対して

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} (b_{n\nu}-b_{n,\nu+1})(s_\nu-s)+b_{n0}s \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

は有限確定である．さらに仮定より $\lim_{n\to\infty} t_n$ は収束する．ゆえに定理 2.3 より

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_{n\nu}-b_{n,\nu+1}|\leqq M$$

であるような n に無関係な定数 M が存在する．

十分条件．$\lim_{\nu\to\infty} s_\nu=s$ であるような任意の数列 $\{s_\nu\}$ に対して，条件（i）より

(4.1) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}u_\nu=b_{n0}s+\sum_{\nu=0}^{\infty} (b_{n\nu}-b_{n,\nu+1})(s_\nu-s)$$

はすべての $n=0, 1, \cdots$ に対して有限確定である．

次に任意の $\varepsilon>0$ に対して適当に p をえらび

$$|s_\nu-s|<\frac{\varepsilon}{M} \qquad (\nu=p+1, p+2, \cdots)$$

となるようにする．上式を

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}u_\nu=b_{n0}s+\left(\sum_{\nu=0}^{p}+\sum_{\nu=p+1}^{\infty}\right)(b_{n\nu}-b_{n,\nu+1})(s_\nu-s)$$

$$=b_{n0}s+\Sigma_1+\Sigma_2$$

とおく．条件（ii）より $n\to\infty$ のとき

$$\Sigma_1 \to \sum_{\nu=0}^{p} (\beta_\nu - \beta_{\nu+1})(s_\nu - s)$$

である．また条件（i）より任意の n に対して $|\Sigma_2| < \varepsilon$ である．さらに条件（ii）より $\lim_{n\to\infty} b_{n0} = \beta_0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu} u_\nu = \beta_0 s + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\beta_\nu - \beta_{\nu+1})(s_\nu - s)^{1)}$$

である．この右辺の級数の収束は（i），（ii）より明らかである．

（証明終）

定理 4.3.　級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が値 s に収束するとき，つねに

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu} u_\nu \quad (n=0, 1, \cdots)$$

が収束して，かつ $\lim_{n\to\infty} t_n = s$ であるための必要十分条件は，

（i）　すべての $n=0, 1, \cdots$ に対して

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_{n\nu} - b_{n,\nu+1}| \leqq M$$

であるような，n に無関係な有限な数 M が存在して，

（ii′）　$$\lim_{n\to\infty} b_{n\nu} = 1 \qquad (\nu=0, 1, \cdots)$$

なることである，

証明．　必要条件（i）については前定理と同じ．

次に前定理の記号で，$\beta_k \neq \beta_{k+1}$ なる k があると仮定する．いま

$$u_\nu = 0 \quad (\nu < k), \quad u_k = 1, \quad u_{k+1} = -1, \quad u_\nu = 0 \quad (\nu > k+1)$$

とおくと，$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu = s = 0$ である．また前定理より

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \beta_k - \beta_{k+1} \neq 0$$

となり矛盾である．よって，すべての $k=0, 1, \cdots$ に対して $\beta_k = \beta_{k+1}$ でなければならない．ゆえに前定理より，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ ならば $\lim_{n\to\infty} t_n = \beta_0 s$ となり，仮定により $\beta_0 = 1$ となる．よって（ii′）は必要条件である．

十分条件（i），（ii′）が十分条件であることは前定理より明らかである．

（証明終）

---

1)　十分条件の証明はもっと簡単に (4.1) と定理 2.3 とから直ちに得られる．

$b_\nu(x)$, $\nu=0, 1, \cdots$ は実数 x のある集合 E で定義された関数列とし，点 ω は E の集積点とする．級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が与えられたとき，

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(x)\,u_\nu$$

がすべての $x\in E$ に対して収束して，かつ

$$\lim_{\substack{x\to\omega\\x\in E}} f(x)$$

が収束するとき，ここに一つの総和法が定義される．このようにして定義される総和法を「関数列 $\{b_\nu(x)\}$ による級数－関数変換で与えられる総和法」という．前定理と同様にして次の定理が証明される．

定理 4.4.　級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が和 s をもつとき，

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(x)\,u_\nu$$

がすべての $x\in E$ に対して収束して，かつ $\lim_{\substack{x\to\omega\\x\in E}} f(x)=s$ であるための必要十分条件は，

$$\text{(i)}\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu(x)-b_{\nu+1}(x)|\leqq M \qquad (x\in E)$$

であるような，x に無関係な有限の数 M が存在して，

$$\text{(ii)}\qquad \lim_{\substack{x\to\omega\\x\in E}} b_\nu(x)=1 \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

なることである，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

次に級数－級数変換によって定義される総和法について述べよう．いま，行列 $C=(c_{n\nu})$ が与えられている．級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ に対して，

$$v_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu}u_\nu$$

がすべての $n=0, 1, \cdots$ に対して収束して，かつ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ が収束するとき，ここに一つの総和法が定義される．しかし，このような型の総和法は級数－数列型総和法に帰着されることを示そう．いま，

$$b_{n\nu}=c_{o\nu}+c_{1\nu}+\cdots+c_{n\nu} \qquad (n,\ \nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおく．もし $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が**級数－級数型総和法** C により値 s に総和可能であ

るならば，

$$v_0+v_1+\cdots+v_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{0\nu}u_\nu+\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{1\nu}u_\nu+\cdots+\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{n\nu}u_\nu$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_{n\nu}u_\nu=t_n$$

であるから，$\lim_{n\to\infty}t_n=\sum_{n=0}^{\infty}v_n=s$ となり，$\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ は級数－数列型総和法 $B=(b_{n\nu})$ により，同じ値 s に総和可能である．

逆にもし $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ が級数－数列型総和法 B により値 s に総和可能であるならば，$\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ は級数－級数型総和法 C により同じ値に総和可能であることも容易に証明される．

定理 4.3 の繰り返しになるが，後で使い易いように次の形に整理しておく．

定理 4.5. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ が値 s に収束するとき，つねに

$$v_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{n\nu}u_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

が収束して，かつ $\sum_{n=0}^{\infty}v_n$ も同じ値 s に収束するための必要十分条件は，

$$b_{n\nu}=c_{0\nu}+c_{1\nu}+\cdots+c_{n\nu} \qquad (n,\ \nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくとき，

(i) すべての $n=0, 1, \cdots$ に対して

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|b_{n\nu}-b_{n,\nu+1}|\leqq M$$

であるような，n に無関係な有限な数 M が存在して，

(ii) $$\lim_{n\to\infty}b_{n\nu}=1 \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

なることである．

§5. ローレンツ・ツェラーの定理

行列が与えられたとき，それによる数列－数列変換および級数－数列変換によって定義される二とおりの総和法が今迄に述べられた．これらの総和法がパーマネントであるための条件も極めて密接な関係があることに気付く．

本節ではこれら二とおりの総和法の間にどのような関係があるか調べよう．本節の諸定理はエルデス，ピラニアンにはじまりローレンツ，ツェラーによって完成されたものである．

行列 $A=(a_{n\nu})$ が与えられたとき，もし

$$d_{n\nu}=\sum_{i=\nu}^{\infty}a_{ni}$$

がすべての $n, \nu=0, 1, \cdots$ に対して収束するとき，行列 $D=(d_{n\nu})$ を A の**双対行列**という．$s_\nu=u_0+u_1+\cdots+u_\nu$ とおくと，形式的に

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}s_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}\sum_{k=0}^{\nu}u_k=\sum_{k=0}^{\infty}u_k\sum_{\nu=k}^{\infty}a_{n\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}d_{nk}u_k=\tau_n$$

と書ける．ここで二重和の順序交換は確かめられていない．ゆえに行列 A による数列－数列型総和法 A と行列 D による級数－数列型総和法 D とは必ずしも同値とはいえない．しかし，すでに定理 2.1 で証明した，総和法 A がパーマネントであるための必要十分条件（i），（ii），（iii）と，定理 4.3 で証明した，総和法 D がパーマネントであるための必要十分条件（i），（ii′）（$b_{n\nu}$ の代りに $d_{n\nu}$ とする）とは同値であることに気付く．ここで一つの疑問がおこる．パーマネントな数列－数列型総和法を任意に与えるとき，それと同値である級数－数列型総和法は存在するであろうか？　逆にパーマネントな級数－数列型総和法を任意に与えるとき，それと同値である数列－数列型総和法は存在するであろうか？　これらの答はいずれも否であることを順次証明していこう．

行列 $A=(a_{n\nu})$ において，与えられた n に対して $a_{n\nu}\neq 0$ であるような ν の全体からなる集合を K_n とおく．次の四つの条件を考えよう．

（i）　任意の $n=0, 1, \cdots$ に対して K_n は無限集合である．

（ii）　もし $n\neq m$ ならば，$K_n\cap K_m$ は有限集合[1]である．

（iii）　$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|$ はすべての $n=0, 1, \cdots$ に対して収束する．

（iv）　任意の $n=0, 1, \cdots$ に対して $K_0\cup K_1\cup\cdots\cup K_n$ は隣合った整数を有限個しかもたない．

ここですべての $n=0, 1, \cdots$ に対して K_n が有限集合であるような行列

1)　「有限集合」は広義，すなわち「高々有限集合」の意味に用いる．

A を**行有限**という．三角行列はその特別の場合である．

(i)—(iv) のすべての条件を満足する T-行列の例としては，たとえば

$$K_0=(2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \cdots),\qquad K_1=(6,\ 12,\ 24,\ \cdots),$$
$$K_2=(10,\ 14,\ 20,\ 28,\ \cdots),\qquad K_3=(18,\ 22,\ 26,\ 30,\ \cdots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

とし，

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

とするとよい．

まず次の補助定理を証明しよう．

補助定理 5.1. 行列 $A=(a_{n\nu})$ は条件 (i)，(ii) を満足する．行列 $B=(b_{n\nu})$ は行有限で，さらに

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu=0 \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるような任意の数列 $\{s_\nu\}$ に対して，$t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}s_\nu$ はすべての $n=0,\ 1,\ \cdots$ に対して収束し，かつ，$\{t_n\}$ は収束数列であるとする．

このときには正の整数の適当な有限集合 L と適当な正の整数 m をえらべば，

$$\nu \notin L\cup K_0\cup\cdots\cup K_m$$

なるすべての ν と，すべての $n=0,\ 1,\ \cdots$ に対して

$$b_{n\nu}=0$$

であるようにできる．

証明. もし終結が成立しないとすれば，任意の有限集合 L と任意の m に対して

$$l\notin L\cup K_0\cup\cdots\cup K_m$$

なる適当な l と，適当な n に対して $b_{nl}\neq 0$ である．

いま，行列 $B=(b_{n\nu})$ において，与えられた n に対して $b_{n\nu}\neq 0$ であるような ν の全体からなる集合を L_n とおく．いうまでもなくすべての $n=0, 1, \cdots$ に対して L_n は有限集合である．数学的帰納法により次のような三つの整数列 $\{n_r\}$, $\{l_r\}$, $\{\nu_r\}$ をつくる:

$$n_0<n_1<\cdots,$$
$$l_r\notin P_r=L_{n_0}\cup L_{n_1}\cup\cdots\cup L_{n_{r-1}}\cup K_0\cup\cdots\cup K_{r-1},\qquad l_r\in L_{n_r},$$
$$b_{n_r l_r}\neq 0,\qquad \nu_r\in K_r,\qquad \nu_r\notin L_{n_r}\cup P_r.$$

そのためにまず $L_n\neq\phi$ であるような最小の n を n_0 とする．第 r 段階では，背理法の仮定より，ある $n>n_{r-1}$ に対して $b_{nl_r}\neq 0$ であような $l_r\notin P_r$ をえらぶことができる．このような最小の n を n_r とする．次に求める性質をもつ $\nu_r\in K_r$ をえらぶ: 条件（ii）より $K_r\cap P_r$ は有限集合である．条件（i）より $K_r-(L_{n_r}\cup P_r)$ は無限集合で，$\nu_r\in K_r$, $\nu_r\notin L_{n_r}\cup P_r$ なる ν_r は無数に存在する．

次に集合 L_{n_0}, K_0, L_{n_1}, K_1, $\cdots$ 上で順次 s_ν の値を定めよう．$\nu\in P_r$ に対して s_ν の値がすでに知られているとき，$L_{n_r}-P_r$ 上の s_ν の値は

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n_r\nu}s_\nu=(-1)^r$$

であるようにきめる．次に $K_r-(L_{n_r}\cup P_r)$ 上の s_ν の値は

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{r\nu}s_\nu=0$$

となるようにする．このとき無限集合 $K_r-(L_{n_r}\cup P_r)$ のうち有限個の ν を除く他のすべての ν に対して $s_\nu=0$ となるようにすることができる．このようにしてすべての集合 L_{n_0}, K_0, L_{n_1}, K_1, $\cdots$ 上における s_ν の値は定められる．これらの集合に属さない ν に対する s_ν の値は任意に定めてよい．このようにしてできた数列 $\{s_\nu\}$ に対しては，$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu=0$ $(n=0, 1, \cdots)$ であるが,

$$t_{n_r}=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n_r\nu}s_\nu\qquad (r=0, 1, \cdots)$$

なる数列 $\{t_{n_r}\}$ は発散数列であることがわかる．これは定理の仮定に反する．

（証明終）

定理 5.2.　条件（i），（ii），（iii）を満足する行列 $A=(a_{n\nu})$ によって

与えられる数列-数列型総和法を A とする. $\mathscr{F}(A)\subseteqq\mathscr{F}(B)$ であるような, 行有限な行列 B によって与えられるパーマネントな数列-数列型総和法 B は存在しない[2].

証明. いま, 有限な行列 B による数列-数列型総和法 B がもし $\mathscr{F}(A)\subseteqq\mathscr{F}(B)$ であるならば, 総和法 B はパーマネントでないことを示そう.

行列 A, B は補助定理 5.1 の条件を満足するから, 正の整数の適当な有限集合 L と適当な整数 m をえらぶと,

$$\nu\notin L\cup K_0\cup\cdots\cup K_m=P$$

なるすべての ν と, すべての $n=0, 1, \cdots$ に対して $b_{n\nu}=0$ である.

任意の有界数列 $\{s_\nu\}$ に対して, $\nu\in P$ については $s_\nu'=s_\nu$ で, かつ

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}s_\nu'=0 \qquad (n=m+1,\ m+2,\ \cdots)$$

であるような数列 $\{s_\nu'\}$ を次のようにしてつくる.

任意の $n=m+1, m+2, \cdots$ に対して,

$$\nu_n\in K_n, \qquad \nu_n\notin L\cup K_0\subset\cdots\cup K_{n-1}$$

なる一つの ν_n をえらぶ. これは条件 (i), (ii) により可能である. 各 ν_n は互いに相異なり, かつ $\nu_n\notin P$ $(n=m+1, m+2, \cdots)$ である. いま,

$$s_\nu'=\begin{cases} s_\nu, & \text{ただし } \nu\in P,\\ 0, & \text{ただし } \nu\neq\nu_n\ (n=m+1,\ m+2,\ \cdots)\ \text{かつ}\ \nu\notin P\end{cases}$$

とし, さらに, s'_{ν_n} $(n=m+1, m+2, \cdots)$ は次のようにきめる:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}s_\nu' &= \sum_{\nu\in K_n}a_{n\nu}s_\nu'\\ &= \sum_{\nu\in K_n\cap P}a_{n\nu}s_\nu+\sum_{\nu_i\in K_n-P}a_{n\nu_i}s_{\nu_i}'=0 \qquad (n=m+1,\ m+2,\ \cdots).\end{aligned}$$

$n=0, 1, \cdots, m$ に対して $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}s_\nu'$ が収束することは条件 (iii) より明らかである. したがって

$$A\text{-}\lim_{\nu\to\infty}s_\nu'=0$$

である.

---

2) もし総和法 B からパーマネントの条件をとり去るならば, たとえば行列 B として 0 ばかりからなる無限行列をとれば, $\mathscr{F}(A)\subseteqq\mathscr{F}(B)$ となる. この定理の主要部分はエルデス・ピラニアンにはじまる.

他方 $\mathscr{F}(A)\subseteqq\mathscr{F}(B)$ なることから，数列 $\{s_\nu'\}$ は B–総和可能である．また $b_{n\nu}=0$ ($\nu\notin P$; $n=0, 1, \cdots$) で，さらに $s_\nu'=s_\nu$ ($\nu\in P$) なることから

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}s_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}s_\nu' \qquad (n=0, 1, \cdots),$$

よって

$$B\text{–}\lim_{\nu\to\infty} s_\nu=B\text{–}\lim_{\nu\to\infty} s_\nu'$$

である．すなわち総和法 B は任意の有界数列を総和する．定理 3.1 より総和法 B はパーマネントであり得ない．　(証明終)

定理 5.3.　条件 (i), (ii) を満足する行列 $A=(a_{n\nu})$ によって与えられる級数–数列型総和法を A とする．$\mathscr{F}(A)\subseteqq\mathscr{F}(B)$ であるような，行有限な行列 B によって与えられるパーマネントな級数–数列型総和法 B は存在しない．

証明.　前定理の証明と同様に，行有限な行列 B による級数–数列型総和法 B がもし $\mathscr{F}(A)\subseteqq\mathscr{F}(B)$ であるならば，総和法 B はパーマネントでないことを示そう．

行列 A は (i), (ii) を満足し，行列 B は行有限で，さらに仮定より

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}u_\nu=0 \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

であるような任意の級数 $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ に対して，数列 $\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}u_\nu\right\}_{n=0,1,\cdots}$ が収束するゆえ，補助定理 5.1 により正の整数の適当な有限集合 L と適当な整数 m をえらべば，

$$\nu\notin L\cup K_0\cup\cdots\cup K_m=P$$

なるすべての ν と，すべての $n=0, 1, \cdots$ に対して $b_{n\nu}=0$ である．条件 (i), (ii) より $\nu\notin P$ であるような正の整数 ν は無数に存在して，かつ，このような ν に対しては $\lim_{n\to\infty} b_{n\nu}=0$ である．よって行列 $B=(b_{n\nu})$ は総和法 B がパーマネントであるための条件，定理 4.3 (ii′) を満足しない．

(証明終)

定理 5.4.　条件 (i), (ii), (iii), (iv) を満足する行列 $A=(a_{n\nu})$ によって与えられる数列–数列型総和法を A とする．$\mathscr{F}(A)\subseteqq\mathscr{F}(B)$ である

ような，行列 $B=(b_{n\nu})$ によって与えられるパーマネントな級数-数列型総和法 B は存在しない．

証明． 前二定理の証明と同様に，行列 B による級数-数列型総和法 B が，もし $\mathscr{F}(A)\subseteqq\mathscr{F}(B)$ であるならば，総和法 B はパーマネントでないことを示そう．

$$s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots), \qquad s_{-1}=0$$

とする．もし数列 $\{s_n\}$ が

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}s_\nu=0 \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるとすると，$\{s_n\}\in\mathscr{F}(A)$ ゆえ仮定により

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}b_{n\nu}u_\nu=\lim_{i\to\infty}\left\{\sum_{\nu=0}^{i}b_{n\nu}(s_\nu-s_{\nu-1})\right\}$$
$$=\lim_{i\to\infty}\left\{\sum_{\nu=0}^{i-1}(b_{n\nu}-b_{n,\nu+1})s_\nu+b_{ni}s_i\right\}$$

はすべての $n=0,1,\cdots$ に対して収束する．いま n を任意に一つ固定して

$$c_{i\nu}=\begin{cases} b_{n\nu}-b_{n,\nu+1}, & \text{ただし } \nu=0,\ 1,\ \cdots,\ i-1;\ i\geqq 1, \\ b_{ni}, & \text{ただし } \nu=i=0,\ 1,\ \cdots, \\ 0, & \text{それ以外のすべての } i,\ \nu \end{cases}$$

とおくと，上式は

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{\nu=0}^{i}c_{i\nu}s_\nu$$

となる．

行列 $A=(a_{n\nu})$ と三角行列 $C=(c_{i\nu})$ は補助定理 5.1 の条件を満足するから，正の整数の適当な有限集合 L と適当な整数 m をえらぶと，

$$\nu\notin L\cup K_0\cup\cdots\cup K_m=P$$

なるすべての ν と，すべての $i=0,1,\cdots$ に対して $c_{i\nu}=0$，すなわち

$$b_{n\nu}-b_{n,\nu+1}=0, \qquad b_{n\nu}=0$$

である．ゆえに

$$b_{n\nu}=b_{n,\nu+1}=0 \qquad (\nu\notin P)$$

である．

他方行列 A は条件 (iv) を満足するから，集合 P の要素は高々有限個

だけが隣合っていて，それ以外の P の要素はすべて両隣が P に属さない．したがって高々有限個の ν を除いて，他のすべての ν に対して $b_{n\nu}=0$ である．このことは任意の $n=0, 1, \cdots$ について成り立つから，行列 $B=(b_{n\nu})$ は行有限である．ゆえに

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}u_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}(s_\nu-s_{\nu-1})=\sum_{\nu=0}^{\infty} d_{n\nu}s_\nu \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

なる行有限な行列 $D=(d_{n\nu})$ が存在する．すなわち行列 B による級数－数列型総和法 B と，行列 D による数列－数列型総和法 D とは同値である．もちろん $\mathscr{F}(B)=\mathscr{F}(D)$ である．ゆえに仮定より $\mathscr{F}(A)\subseteqq\mathscr{F}(D)$ である．

条件（i），(ii)，(iii) を満足する行列 A によって与えられる数列－数列型総和法 A と，行有限な行列 D によって与えられる数列－数列型総和法 D の総和域の間には $\mathscr{F}(A)\subseteqq\mathscr{F}(D)$ の関係がある．定理 5.2 より総和法 D はパーマネントではあり得ない．ゆえに総和法 B もパーマネントではない．

(証明終)

定理 5.5.　条件（i），(ii) を満足する行列 $A=(a_{n\nu})$ によって与えられる級数－数列型総和法を A とする．$\mathscr{F}(A)\subseteqq\mathscr{F}(B)$ であるような，行列 $B=(b_{n\nu})$ によって与えられるパーマネントな数列－数列型総和法 B は存在しない．

証明.　前三定理の証明と同様に，行列 B による数列－数列型総和法 B がもし $\mathscr{F}(A)\subseteqq\mathscr{F}(B)$ であるならば，総和法 B はパーマネントでないことを示そう．

もし級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}u_\nu=0 \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

であるとすると，仮定より，その部分和

$$s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

については $\{s_n\}\in\mathscr{F}(B)$ である．いま $n=0, 1, \cdots$ を任意に一つ固定して

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{i} b_{n\nu}s_\nu&=\sum_{\nu=0}^{i} b_{n\nu}(u_0+\cdots+u_\nu)\\&=\sum_{\nu=0}^{i}\left(\sum_{k=\nu}^{i} b_{nk}\right)u_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{i\nu}u_\nu\end{aligned}$$

とおく．ここで

$$c_{i\nu}=\begin{cases}\sum_{k=\nu}^{i} b_{nk}, & \text{ただし } \nu=0,\ 1,\ \cdots,\ i, \\ 0, & \text{ただし } \nu>i\end{cases}$$

とおく．仮定より $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}s_\nu$，すなわち $\lim_{i\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{i\nu}u_\nu$ は収束する．

行列 $A=(a_{n\nu})$ と三角行列 $C=(c_{i\nu})$ は補助定理 5.1 の条件を満足するから，正の整数の適当な有限集合 L と適当な整数 m をえらぶと，

$$\nu\notin L\cup K_0\cup\cdots\cup K_m=P$$

なるすべての ν と，すべての $i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して $c_{i\nu}=0$，すなわち

$$b_{n\nu}+b_{n,\nu+1}+\cdots+b_{ni}=0 \qquad (i\geqq\nu)$$

である．ゆえにある $\nu_0\notin P$ があって

$$b_{n\nu_0}=b_{n,\nu_0+1}=b_{n,\nu_0+2}=\cdots=0$$

である．このことは任意の $n=0,\ 1,\ \cdots$ について成り立つから，行列 $B=(b_{n\nu})$ は行有限である．ゆえに

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}s_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}(u_0+u_1+\cdots+u_\nu)=\sum_{\nu=0}^{\infty} d_{n\nu}u_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

なる行有限な行列 $D=(d_{n\nu})$ が存在する．すなわち行列 B による数列-数列型総和法 B と，行列 D による級数-数列型総和法 D とは同値である．もちろん $\mathcal{F}(B)=\mathcal{F}(D)$ である．ゆえに仮定より $\mathcal{F}(A)\subseteqq\mathcal{F}(D)$ である．定理 5.3 より総和法 D，したがって総和法 B はパーマネントであり得ない．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

演 習 問 題　1

1.　T-行列に関する次の性質を証明せよ:（i）任意の二つの T-行列の積は存在して，かつ，その積もまた T-行列である．（ii）T-行列の積については結合法則が成立する．

2.　ある T-行列による数列-数列型総和法によって，数列 $\{s_n\}$ の任意の部分列が総和可能であるならば，$\{s_n\}$ は収束することを証明せよ．

3.　任意の有界発散数列 $\{s_n\}$ と任意の有界数列 $\{t_n\}$ が与えられたとき，$\{s_n\}$ を $\{t_n\}$ に変換する T-行列が存在することを示せ．

4.　もし二つの T-行列 $A,\ B$ が $AB=BA$ であるならば，$A,\ B$ により与えられる二つの数列-数列型総和法は少なくとも有界数列に対しては共存することを示せ．

5.　もし前問でさらに行列 A, B が行有限であるならば，二つの総和法は共存することを示せ．

6.　任意の複素 T-行列についてシュタインハウスの定理（定理 3.1）を証明せよ．

7.
$$b_\nu(x)=\frac{\Gamma(1+\nu x)}{\Gamma(1+\nu)}\qquad (0\leqq x<1;\ \nu=0,\ 1,\ \cdots)$$
とおく．級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ が与えられたとき
$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu(x)u_\nu$$
により与えられる総和法を**ルロワ（LR）総和法**という．この総和法がパーマネントであることを証明せよ．

8.　$b_0(x)=1,\quad b_\nu(x)=\dfrac{x(x+1)\cdots(x+\nu-1)}{(x+r)(x+r+1)\cdots(x+r+\nu-1)}\quad (x\geqq 0;\ \nu=1,\ 2,\ \cdots)$

とおく．ここで $r>0$ はあらかじめ与えられた数とする．級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ が与えられたとき，前問と同様に $\lim_{x\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu(x)u_\nu$ で与えられる総和法はパーマネントであることを証明せよ．

第2章　各種総和法

前章では総和法の一般論を述べたが，本章ではよく使われる色々の具体的な総和法について述べよう．

§6.　チェザロ総和法

いうまでもなくこの総和法は各種総和法の中でも最も基本的なものの一つで，研究の歴史も古く，またフーリエ級数等への応用も広い．

$k>-1$ なる任意の実数 k に対して，行列 $A=(a_{n\nu})$ を

$$a_{n\nu}=\begin{cases}\dfrac{\dbinom{n-\nu+k-1}{k-1}}{\dbinom{n+k}{k}}, & \text{ただし}\quad 0\leqq\nu\leqq n,\\[2ex] 0, & \text{ただし}\quad \nu>n\end{cases}$$

により定義する．ここで

$$\binom{n+k}{k}=\frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}{n!}=\binom{n+k}{n},$$

また任意の実数 r に対して $\dbinom{r}{0}=1$ とする．行列 $A=(a_{n\nu})$ は三角行列である．

この行列 A による数列－数列変換で与えられる総和法を**チェザロ (C,k)-総和法**といい，k をその**次数**という．特に $(C,1)$-総和法は第1章 §1 で述べた算術平均による総和法で，$(C,0)$-総和法は普通の収束となる．このように k に異なる値を与えると，異なる総和法が得られるが，それらの間には次のような関係がある．

定理 6.1.（**チャプマン・クノップの定理**）　もし　$-1<k'<k$　ならば，$(C,k')\subseteqq(C,k)$ である．

この定理を証明するために，まず次の定理を証明しよう．

定理 6.2.（**チェザロの 定理**）　数列 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n^r}=\alpha$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{n^s}=\beta$ とする．ここで α,β は有限の数で，また $r, s>-1$ とする．すると次のことが成り立つ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_0}{n^{r+s+1}}=\alpha\beta\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}.$$

証明． $\alpha_n=\alpha n^r(1+\eta_n)$，$\beta_n=\beta n^s(1+\zeta_n)$ とおく，ここで $\eta_n=o(1)$，$\zeta_n=o(1)$．スターリングの公式より

$$\Gamma(x+1)=e^{-x}x^x(2\pi x)^{1/2}(1+\varepsilon_x)$$

である，ここで $\varepsilon_x=o(1)$ $(x\to\infty)$．ゆえに

$$\binom{r+n}{n}=\frac{1}{\Gamma(r+1)}\frac{\Gamma(r+n+1)}{\Gamma(n+1)}=\frac{n^r}{\Gamma(r+1)}(1+\varepsilon_n),$$

$$\binom{s+n}{n}=\frac{n^s}{\Gamma(s+1)}(1+\delta_n)$$

である，ここで $\varepsilon_n=o(1)$，$\delta_n=o(1)$ $(n\to\infty)$．ゆえに仮定より

$$\alpha_n=\alpha\Gamma(r+1)(1+\varepsilon_n')\binom{r+n}{n},\quad \beta_n=\beta\Gamma(s+1)(1+\delta_n')\binom{s+n}{n}$$

である，ここで $\varepsilon_n'=o(1)$，$\delta_n'=o(1)$．よって

$$\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_0$$
$$=\alpha\beta\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)\sum_{t=0}^{n}(1+\varepsilon_t')(1+\delta_{n-t}')\binom{r+t}{t}\binom{s+n-t}{n-t},$$

ここで $\sum_{t=0}^{n}\binom{r+t}{t}\binom{s+n-t}{n-t}$ は $(1-x)^{-r-1}(1-x)^{-s-1}$，すなわち $(1-x)^{-r-s-2}$ の x の巾による展開の x^n の係数であるから $\binom{r+s+n+1}{n}$ に等しい．ゆえに $n\to\infty$ のとき

$$\frac{\alpha\beta\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)\sum_{t=0}^{n}\binom{r+t}{t}\binom{s+n-t}{n-t}}{n^{r+s+1}}\to\frac{\alpha\beta\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}$$

である．次に

$$\sum_{t=0}^{n}\varepsilon_t'\binom{r+t}{t}\binom{s+n-t}{n-t}$$

をしらべる．任意に $\sigma>0$ を与えるとき，適当に正の整数 m をとり，$t>m$

に対して $|\varepsilon_t'|<\sigma$ であるようにする．$n>m$ なる n に対して

$$\left|\sum_{t=0}^{m}\varepsilon_t'\binom{r+t}{t}\binom{s+n-t}{n-t}\right|\leqq A\sum_{t=0}^{m}\binom{r+t}{t}\frac{(n-t)^s}{\Gamma(s+1)}(1+\delta_{n-t})$$

である，ここで $|\varepsilon_n'|<A$, $|\delta_n'|<A$ とする．この右辺に $\dfrac{1}{n^{r+s+1}}$ を掛けて $n\to\infty$ とすると 0 に収束する．また

$$\left|\sum_{t=m+1}^{n}\varepsilon_t'\binom{r+t}{t}\binom{s+n-t}{n-t}\right|\leqq\sigma\sum_{t=0}^{n}\binom{r+t}{t}\binom{s+n-t}{n-t}=\sigma\binom{r+s+n+1}{n}$$

である．この右辺に $\dfrac{1}{n^{r+s+1}}$ を掛けて $n\to\infty$ とすると σ の定数倍に収束する．

次に

$$\sum_{t=0}^{n}\delta_{n-t}'\binom{r+t}{t}\binom{s+n-t}{n-t}$$

をしらべる．任意に $\sigma>0$ を与えるとき，適当に正の整数 m をとり，$t<n-m$ に対して $|\delta_{n-t}'|<\sigma$ であるようにする．$\left|\sum_{t=0}^{n}\delta_{n-t}'\binom{r+t}{t}\binom{s+n-t}{n-t}\right|$ を $\sum_{t=0}^{n-m-1}$ と $\sum_{t=n-m}^{n}$ とに分ける．次に $\dfrac{1}{n^{r+s+1}}$ を掛けて $n\to\infty$ とすると，上と同様にして σ の定数倍に収束する．

最後に

$$\frac{1}{n^{r+s+1}}\left|\sum_{t=0}^{n}\varepsilon_t'\delta_{n-t}'\binom{r+t}{t}\binom{s+n-t}{n-t}\right|$$
$$\leqq\frac{A}{n^{r+s+1}}\sum_{t=0}^{n}|\varepsilon_t'|\binom{r+t}{t}\binom{s+n-t}{n-t}$$

である．この右辺を $n\to\infty$ とすると上と同様にして σ の定数倍に収束する．

以上の結果を組み合わせると，σ が任意の正数であることから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_0}{n^{r+s+1}}=\alpha\beta\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+1)}$$

が導かれる．　(証明終)

この定理を使って，すでに述べた定理 6.1 を証明しよう．いま $k>-1$ に対し

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}s_\nu = \frac{1}{\binom{n+k}{k}}\left\{\binom{n+k-1}{k-1}s_0+\binom{n-1+k-1}{k-1}s_1+\cdots\right.$$
$$\left.+\binom{k}{k-1}s_{n-1}+s_n\right\}=\frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}$$

とおく．いうまでもなく仮定 $(C, k')\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{(k')}}{\binom{n+k'}{k'}}=\lim_{n\to\infty} S_n^{(k')}\frac{\Gamma(k'+1)}{n^{k'}}(1+\varepsilon_n)=s,\quad \varepsilon_n=o(1),$$

すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n{}^{(k')}}{n^{k'}}=\frac{s}{\Gamma(k'+1)}$$

と同値である．

さて巾級数

$$1+\binom{k}{1}x+\binom{k+1}{2}x^2+\cdots+\binom{k+n-1}{n}x^n+\cdots$$

は $|x|<1$ において絶対収束して和 $(1-x)^{-k}$ をもつ．この巾級数に多項式

$$s_0+s_1x+\cdots+s_nx^n$$

を掛けると，$(1-x)^{-k}(s_0+s_1x+\cdots+s_nx^n)$ の x の巾による展開の x^n の係数は $S_n{}^{(k)}$ である．ゆえに，この式は $|x|<1$ において

$$S_0^{(k)}+S_1^{(k)}x+S_2^{(k)}x^2+\cdots+S_n^{(k)}x^n+\cdots \tag{6.1}$$

である．他方

$$\begin{aligned}&(1-x)^{-k}(s_0+s_1x+\cdots+s_nx^n)\\&=(1-x)^{-(k-k')}\{(1-x)^{-k'}(s_0+s_1x+\cdots+s_nx^n)\}\\&=\left\{1+\binom{k-k'}{1}x+\binom{k-k'+1}{2}x^2+\cdots+\binom{k-k'+n-1}{n}x^n+\cdots\right\}\\&\quad\times\{S_0^{(k')}+S_1^{(k')}x+S_2^{(k')}x^2+\cdots+S_n^{(k')}x^n+\cdots\}\quad(|x|<1)\end{aligned} \tag{6.2}$$

である．(6.1) および (6.2) の巾級数は同一でなければならないから，両者の x^n の係数を比較すると

$$(6.3)\qquad S_n^{(k)}=S_n^{(k')}+\binom{k-k'}{1}S_{n-1}^{(k')}+\binom{k-k'+1}{2}S_{n-2}^{(k')}+\cdots$$
$$+\binom{k-k'+n-1}{n}S_0^{(k')}\text{[1]}$$

が得られる．定理 6.2 において，α_n として $S_n^{(k')}$，β_n として $\binom{k-k'+n-1}{n}$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{(k')}}{n^{k'}}=\frac{s}{\Gamma(k'+1)},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{k-k'+n-1}{n}}{n^{k-k'-1}}=\frac{1}{\Gamma(k-k')}$$

なるゆえ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{(k)}}{n^k}=\frac{s}{\Gamma(k+1)}$$

である，ここでいうまでもなく $k-k'>0$ である．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}=s,$$

すなわち $(C, k)\text{-}\lim_{n\to\infty}s_n=s$ が証明された．　　　　(証明終)

$(C, 0)$-総和法が普通の収束であることから次の系が得られる．

系． $k\geqq 0$ のとき，(C, k)-総和法はパーマネントである．

さて，すでに定義したように

$$S_n^{(k)}=\binom{n+k-1}{k-1}s_0+\binom{n+k-2}{k-1}s_1+\cdots+\binom{k}{k-1}s_{n-1}+s_n$$

であるが，ここで $s_p=u_0+u_1+\cdots+u_p$ $(p=0, 1, \cdots, n)$ を代入して u_p について整頓し，

$$\binom{k+p-1}{p}+\binom{k+p-1}{p-1}=\binom{k+p}{p}\quad (p=1, 2, \cdots, n)$$

を使うと

$$(6.4)\qquad S_n^{(k)}=\binom{n+k}{k}u_0+\binom{n+k-1}{k}u_1+\cdots+\binom{k+1}{k}u_{n-1}+u_n$$

---

1) 特に $k=k'+1$ のときには $S_n^{(k)}=S_n^{(k')}+S_{n-1}^{(k')}+\cdots+S_0^{(k')}$ となる．

を得る．

次に (6.3) を得たときと同様に

$$(1-x)^{-(k'+1)}(u_0+u_1x+\cdots+u_nx^n)$$
$$=(1-x)^{k-k'}\{(1-x)^{-(k+1)}(u_0+u_1x+\cdots+u_nx^n)\}$$
$$=\left\{1-\binom{k-k'}{1}x+\binom{k-k'}{2}x^2+\cdots+(-1)^n\binom{k-k'}{n}x^n+\cdots\right\}$$
$$\times\{S_0^{(k)}+S_1^{(k)}x+\cdots+S_n^{(k)}x^n+\cdots\}$$

の x^n の係数を比較すると

$$S_n^{(k')}=S_n^{(k)}-\binom{k-k'}{1}S_{n-1}^{(k)}+\binom{k-k'}{2}S_{n-2}^{(k)}-\cdots+(-1)^n\binom{k-k'}{n}S_0^{(k)} \tag{6.5}$$

が得られる[2)]．

この (6.3), (6.5) はともに $k'<k$ に対して使うことにしよう．特に (6.5) で $k-k'$ が整数で，かつ $k-k'<n$ のときは，この式は

$$S_n^{(k')}=\sum_{p=0}^{k-k'}(-1)^p\binom{k-k'}{p}S_{n-p}^{(k)}$$

となる．また，この式を使って負の値の k に対する $S_n{}^{(k)}$ を定義することができる．すなわち上式で $k'=-m$, $k=0$ とおくと $S_p{}^{(0)}=s_p$ なるゆえ

$$S_n^{(-m)}=s_n-\binom{m}{1}s_{n-1}+\binom{m}{2}s_{n-2}-\cdots$$

である．特に

$$S_n^{(-1)}=s_n-s_{n-2}=u_n$$

である．

数列（または級数）が (C, k)-総和可能であるとは，すでに述べたように $\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}$ が収束することであるが，もっと一般に $\dfrac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}$ $(n=0, 1,$

---

2) (6.3) と $\binom{k-k'+p-1}{p}=(-1)^p\binom{k'-k}{p}$ $(p=1, 2, \cdots, n)$ からも (6.5) が導かれる．

…) が有界であるとき，数列（または級数）は **(C, k)-有界**であるという．これらに関して次の定理が成り立つ．

定理 6.3. $k>-1$ とする．もし $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が (C, k)-総和可能ならば，$k'<k$ なる任意の k' に対して $S_n^{(k')}=o(n^k)$ である．もし $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ が (C, k)-有界ならば，$k'<k$ なる任意の k' に対して $S_n^{(k')}=O(n^k)$ である．ここでいずれの場合にも k' は $k'>-1$ であることを要しない．

この定理で $k>-1$ のときは $k'=-1$, $k>0$ のときは $k'=0$ ととると，次の定理が得られる．

定理 6.4. もし $k>-1$ ならば，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が (C, k)-総和可能または (C,k)-有界なるかにより，それぞれ $u_n=o(n^k)$ または $u_n=O(n^k)$ である．もし $k>0$ ならば，$\{s_n\}$ が (C, k)-総和可能または (C, k)-有界なるかにより，それぞれ $s_n=o(n^k)$ または $s_n=O(n^k)$ である．

一般的な定理 6.3 を証明しよう．$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ は (C, k)-有界とし，

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}=U, \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}=L$$

とおくと

$$S_n^{(k)}=\left\{\frac{1}{2}(U+L)+\frac{1}{2}(U-L)\theta_n+\varepsilon_n\right\}\binom{n+k}{k}$$

と書ける，ここで $|\theta_n|\leqq 1$, $\varepsilon_n=o(1)$ とする．この $S_n^{(k)}$ を (6.5) に代入する． $S_n^{(k')}$ を表す式で $\frac{1}{2}(U+L)\binom{n+k}{k}$ に由来する項は，

$$A_n\equiv\frac{1}{2}(U+L)\left\{\binom{n+k}{k}-\binom{k-k'}{1}\binom{n+k-1}{k}+\cdots+(-1)^n\binom{k-k'}{n}\right\}$$

である．ここで｛　｝の内は $(1-x)^{k-k'}(1-x)^{-k-1}$ の x の巾による展開の x^n の係数である．ゆえに $\binom{n+k'}{k'}$ に等しい．よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n^k}=\frac{1}{2}(U+L)\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{n+k'}{k'}}{n^k}=\frac{1}{2}(U+L)\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{n+k'}{k'}}{n^{k'}}\frac{1}{n^{k-k'}}=0$$

である．

次に $\left\{\frac{1}{2}(U-L)\theta_n+\varepsilon_n\right\}\binom{n+k}{k}$ に由来する項は

$$
\begin{aligned}
B_n\equiv&\left\{\frac{1}{2}(U-L)\theta_n+\varepsilon_n\right\}\binom{n+k}{k}-\binom{k-k'}{1}\left\{\frac{1}{2}(U-L)\theta_{n-1}+\varepsilon_{n-1}\right\}\\
&\times\binom{n+k-1}{k}+\cdots+(-1)^n\binom{k-k'}{n}\left\{\frac{1}{2}(U-L)\theta_0+\varepsilon_0\right\}\\
=&\frac{1}{\Gamma(k+1)}\sum_{p=0}^{n-1}\left[(-1)^p\binom{k-k'}{p}(n-p)^k(1+\zeta_{n-p})\right.\\
&\left.\times\left\{\frac{1}{2}(U-L)\theta_{n-p}+\varepsilon_{n-p}\right\}\right]+(-1)^n\binom{k-k'}{n}\left\{\frac{1}{2}(U-L)\theta_0+\varepsilon_0\right\},
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

である，ここで $\zeta_n=o(1)$．

（i）　もし $k-k'$ が整数で，かつ $k-k'<n$ ならば

$$
\begin{aligned}
\frac{B_n}{n^k}=\frac{1}{\Gamma(k+1)}\sum_{p=0}^{k-k'}\Bigg[&(-1)^p\binom{k-k'}{p}\left(1-\frac{p}{n}\right)^k(1+\zeta_{n-p})\\
&\times\left\{\frac{1}{2}(U-L)\theta_{n-p}+\varepsilon_{n-p}\right\}\Bigg]
\end{aligned}
$$

である．この式で θ_{n-p}，ε_{n-p}，ζ_{n-p} はすべて有界なるゆえ，$n\to\infty$ のとき $\frac{B_n}{n^k}$ は有界，ゆえに $\frac{S_n^{(k')}}{n^k}$ は有界である．

特にもし $U=L$ ならば，$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_{n-p}=0$　$(p=0,1,\cdots,k-k')$　なるゆえ，$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{(k')}}{n^k}=0$ である．

（ii）　もし $k-k'$ が整数でないならば，(6.5) の右辺の項の個数は n に依存する．また

$$
\left|\binom{k-k'}{p}\right|=\left|\binom{p-(k-k'+1)}{p}\right|<\frac{K}{p^{k-k'+1}}
$$

である，ここで K は p に依存しない．ゆえに

$$
\frac{1}{n^k}\left|\binom{k-k'}{n}\right|<\frac{K}{n^{k-k'}}\cdot\frac{1}{n^{k+1}}=o(1)\qquad(n\to\infty)
$$

であるから，(6.6) の最後の項は考えなくてもよい．

k の正負によりさらに二つの場合に分ける．

（a）　$k\geqq 0$ のときには，任意に与えられた $\delta>0$ に対して，

$$|\zeta_{n-p}|,\ |\varepsilon_{n-p}|<\delta \quad (p=0,1,\cdots,m)$$

であるように n と m $(<n)$ をえらぶと，

$$\left|\frac{B_n}{n^k}\right|\leqq\frac{1}{\Gamma(k+1)}(1+\delta)\left\{\frac{1}{2}(U-L)+\delta\right\}\sum_{p=0}^{m}\left|\binom{k-k'}{p}\right|$$
$$+K'\sum_{p=m+1}^{n}\left|\binom{k-k'}{p}\right|$$

である，ここで K' は定数である．

他方，級数 $\sum_{p=0}^{\infty}\left|\binom{k-k'}{p}\right|$ は収束するゆえ，上式の右辺第1項は m, n が何であっても有界である．右辺第2項は m を十分大きくとると δ より小さい．ゆえに $|S_n^{(k')}/n^k|$ は有界である．もし $U=L$ ならば，$|B_n/n^k|$ は十分大きな n に対して δ の定数倍より小さいから $|S_n^{(k')}/n^k|=o(1)$ $(n\to\infty)$ である．

（b）　$-1<k<0$ のときには，B_n/n^k を三つの部分に分ける．任意に $\delta>0$ を与えたとき，

$$|\zeta_{n-p}|,\ |\varepsilon_{n-p}|<\delta \quad (p=0,1,\cdots,m)$$

であるように十分大きな n と m $\left(<\frac{1}{2}n\right)$ をえらぶ．第1の部分は

$$I_1\equiv\frac{1}{\Gamma(k+1)}\sum_{p=0}^{m}\left[(-1)^p\binom{k-k'}{p}\left(1-\frac{p}{n}\right)^k(1+\zeta_{n-p})\right.$$
$$\left.\times\left\{\frac{1}{2}(U-L)\theta_{n-p}+\varepsilon_{n-p}\right\}\right]$$

とする．$\left(1-\frac{p}{n}\right)^k<\frac{1}{2^k}$ で，かつ（a）のときと同様に $\sum_{p=0}^{\infty}\left|\binom{k-k'}{p}\right|$ は収束するから I_1 は有界である．もし $U=L$ ならば，固定した m に対して $|I_1|$ は δ の定数倍より小さい．

第2の部分は

$$I_2\equiv\frac{1}{\Gamma(k+1)}\sum_{p=m+1}^{\left[\frac{1}{2}n\right]}\left[(-1)^p\binom{k-k'}{p}\left(1-\frac{p}{n}\right)^k(1+\zeta_{n-p})\right.$$
$$\left.\times\left\{\frac{1}{2}(U-L)\theta_{n-p}+\varepsilon_{n-p}\right\}\right]$$

とする．m はさらに $\sum_{p=m+1}^{\infty}\left|\binom{k-k'}{p}\right|<\delta$ であるようにえらぶと，$|I_2|$ は δ の定数倍より小さい．

第3の部分は

$$I_3\equiv\frac{1}{\Gamma(k+1)}\sum_{p=\left[\frac{1}{2}n\right]+1}^{n-1}\left[(-1)^p\binom{k-k'}{p}\left(1-\frac{p}{n}\right)^k(1+\zeta_{n-p})\right.$$
$$\left.\times\left\{\frac{1}{2}(U-L)\theta_{n-p}+\varepsilon_{n-p}\right\}\right]+\frac{(-1)^n}{n^k}\binom{k-k'}{n}\left\{\frac{1}{2}(U-L)\theta_0+\varepsilon_0\right\}$$

とすると，右辺第2項は前述のように $o(1)$ $(n\to\infty)$ であるから，

$$|I_3|\leqq K\sum_{p=\left[\frac{1}{2}n\right]+1}^{n}\frac{1}{p^{k-k'+1}}\left(1-\frac{p}{n}\right)^k+o(1)\leqq\frac{K}{n^{k-k'}}\int_{1/2}^{1}\frac{(1-x)^k}{x^{k-k'+1}}dx+o(1)$$

である，ここで K は定数とする．この右辺は $n\to\infty$ のとき0に収束する．

よって(b)のときも $|S_n^{(k')}/n^k|$ は有界で，特に $U=L$ ならば $n\to\infty$ のとき0に収束する．　　　　　　　　　　　　　　　　(定理 6.3 の証明終)

例． $k>-1$ に対し，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+k}{k}$ は値 $1/2^{k+1}$ に $(C,\ k+1)$-総和可能であるが，$(C,\ k)$-総和可能ではない．

なぜならば，$u_n=(-1)^n\binom{n+k}{k}$ とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n^{(k)}x^n=\left(\frac{1}{1-x}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}s_nx^n=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$$
$$=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+k}{k}x^n=\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{k+1}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+k}{k}x^{2\nu}$$

であるから，

$$S_n^{(k)}=\begin{cases}\binom{\nu+k}{k}, & \text{ただし}\quad n=2\nu\quad(\nu=0,\ 1,\ \cdots),\\ 0, & \text{ただし}\quad n=2\nu+1\quad(\nu=0,\ 1,\ \cdots)\end{cases}$$

である．ゆえに $n=2\nu$ でも $n=2\nu+1$ でも

$$S_n^{(k+1)}=S_0^{(k)}+S_1^{(k)}+\cdots+S_n^{(k)}$$
$$=\binom{k}{k}+\binom{1+k}{k}+\cdots+\binom{\nu+k}{k}=\binom{\nu+k+1}{k+1}$$

となり，$\lim_{n\to\infty}S_n^{(k+1)}\Big/\binom{n+k+1}{k+1}=1/2^{k+1}$ である．

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が (C, k)–総和可能でないことは，上の $S_n^{(k)}$ の式あるいは定理 6.4 から明らかである．

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が与えられたとき，$k=0, 1, \cdots$ に対して (C, k)–総和法は，

$$\begin{aligned} &S_n^{(0)}=u_0+u_1+\cdots+u_n, \\ &S_n^{(1)}=S_0^{(0)}+S_1^{(0)}+\cdots+S_n^{(0)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ &S_n^{(k)}=S_0^{(k-1)}+S_1^{(k-1)}+\cdots+S_n^{(k-1)}, \end{aligned}$$ [3]

および

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k!}{n^k}S_n^{(k)}=s$$

によって定義され，(C, k)–$\sum_{n=0}^{\infty} u_n=s$ と書いた．

これと同様に無限積分 $\int_0^\infty f(x)\,dx$ が与えられたとき，$k=0, 1, \cdots$ に対して

$$\begin{aligned} S_0(\lambda)&=\int_0^\lambda f(x)\,dx, \quad S_1(\lambda)=\int_0^\lambda S_0(x)\,dx, \ \cdots, \\ S_k(\lambda)&=\int_0^\lambda S_{k-1}(x)\,dx=\int_0^\lambda(\lambda-x)S_{k-2}(x)\,dx=\cdots \\ &=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^\lambda(\lambda-x)^{k-1}S_0(x)\,dx \\ &=\frac{1}{k!}\int_0^\lambda(\lambda-x)^k f(x)\,dx, \end{aligned}$$

および

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{k!}{\lambda^k}S_k(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)^k f(x)\,dx=I$$ [4]

により $\int_0^\infty f(x)\,dx$ の (C, k)–総和法を定義することができる．上式真中の式は $k>-1$ なる任意の k に対して使用することができるから，級数のときと同様に $k>-1$ に対して無限積分の (C, k)–総和法が定義される．級数のときと同様に

3) 本節 39 ページ脚注1) 参照.

4) 特に $k=1$ のときは $\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)f(x)\,dx=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda dx\int_0^x f(t)\,dt=I$ となり，級数の算術平均 $\lim_{n\to\infty}\frac{s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}}{n}=s$ に対応する.

$$(C,k)\text{-}\int_0^\infty f(x)\,dx=I$$

なる記号を使うことにする．$k=0$ のときは普通の無限積分となる．

例.

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda \sin ax\,dx \qquad (a>0)$$

は存在しないが，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\sin ax\,dx=\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{\sin a\lambda}{a^2\lambda}\right)=\frac{1}{a}$$

となる．

もし $\int_0^\infty f(x)\,dx$ が収束するならば，この積分は任意の $k>0$ に対して，同じ値に (C,k)-総和可能である．このことは次の定理の系としてでる．

定理 6.5. もし $0\leqq k'<k$ で，かつ $\int_0^\infty f(x)\,dx$ が値 I に (C,k')-総和可能であるならば，この積分は同じ値 I に (C,k)-総和可能である[5]．

証明.

$$\varphi(\lambda,k)=\int_0^\lambda\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)^k f(x)\,dx$$

とおく．$k>k'$ ゆえ

$$\begin{aligned}&\int_0^\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-k'-1}\lambda^{k'}\varphi(\lambda,k')\,d\lambda\\&=\int_0^\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-k'-1}\lambda^{k'}d\lambda\int_0^\lambda\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)^{k'}f(x)\,dx\\&=\int_0^\mu f(x)\,dx\int_x^\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-k'-1}\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)^{k'}\lambda^{k'}d\lambda\\&=\frac{\Gamma(k-k')\Gamma(k'+1)}{\Gamma(k+1)}\mu^{k'+1}\int_0^\mu f(x)\left(1-\frac{x}{\mu}\right)^k dx,\end{aligned}$$

すなわち

$$\varphi(\mu,k)=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-k')\Gamma(k'+1)}\frac{1}{\mu^{k'+1}}\int_0^\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-k'-1}\lambda^{k'}\varphi(\lambda,k')\,d\lambda \text{[6]}$$

---

5) この定理はもっと一般に $-1<k'<k$ に対して成立つ．

6) $k>-1$ に対して $S_k(\lambda)=\dfrac{\lambda^k}{\Gamma(k+1)}\int_0^\lambda\left(1-\dfrac{x}{\lambda}\right)^k f(x)\,dx$ とおくと，この関係式は

$$S_k(\mu)=\frac{1}{\Gamma(k-k')}\int_0^\mu(\mu-\lambda)^{k-k'-1}S_{k'}(\lambda)\,d\lambda$$

と書ける．

である．ゆえに

$$\varphi(\mu, k)-I$$
$$=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-k')\Gamma(k'+1)}\frac{1}{\mu^{k'+1}}\int_0^\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-k'-1}\lambda^{k'}\{\varphi(\lambda, k')-I\}d\lambda.$$

仮定より $\lim_{\lambda\to\infty}\varphi(\lambda, k')=I$ であるから，すべての λ に対して $|\varphi(\lambda, k')-I|\leqq M$, かつ任意の $\varepsilon>0$ に対して，適当に L をえらぶと，任意の $\lambda\geqq L$ に対して $|\varphi(\lambda, k')-I|<\varepsilon$ であるようにできる．ゆえに $\mu>L$ なる任意の μ に対して，

$$|\varphi(\mu, k)-I|\leqq\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-k')\Gamma(k'+1)}\left\{\frac{\varepsilon}{\mu^{k'+1}}\int_L^\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-k'-1}\lambda^{k'}d\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{M}{\mu^{k'+1}}\int_0^L\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-k'-1}\lambda^{k'}d\lambda\right\}$$

である．この右辺第1項は $\leqq\varepsilon$ で，右辺第2項は，L を固定して $\mu\to\infty$ とすると $O(\mu^{-k'-1})=o(1)$ である． (証明終)

§7. ネールント総和法

$p_0>0$, $p_n\geqq0$ $(n=1, 2, \cdots)$ なる数列 $\{p_n\}$ があらかじめ与えられている．

(7.1) $$t_n=t_n(p)=\frac{p_ns_0+p_{n-1}s_1+\cdots+p_0s_n}{p_0+p_1+\cdots+p_n}\quad(n=0, 1, \cdots)$$

とし，もし $\lim_{n\to\infty}t_n=s$ ならば，数列 $\{s_n\}$ は値 s に**ネールント (N, p_n)-総和可能**であるという．

ここで特に $k>0$, $p_n=\binom{n+k-1}{k-1}$ とすると，(N, p_n)-総和法はチェザロ (C, k)-総和法となる．また，

$$p_0=p_1=1,\quad p_2=p_3=\cdots=0,$$

すなわち，

$$t_0=s_0,\quad t_n=\frac{1}{2}(s_{n-1}+s_n)\quad(n=1, 2, \cdots)$$

で定義される数列－数列型総和法を **Y-総和法**という．

定理 7.1. (N, p_n)-総和法がパーマネントであるための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{P_n}=0$$

なることである．ここで $P_n=p_0+p_1+\cdots+p_n$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ とおく．

証明． ネールント総和法 $(N,\ p_n)$ を与える数列－数列変換を，いま $t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}s_\nu$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ とおくと，定義より

$$a_{n\nu}=\begin{cases}\dfrac{p_{n-\nu}}{P_n}, & \text{ただし}\quad \nu\leqq n,\\ 0, & \text{ただし}\quad \nu>n\end{cases}$$

である．$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}=1$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ なるゆえ，シルバーマン・テープリッツの定理の条件(i)，(iii)が満足されることは明らかである．もし行列 $(a_{n\nu})$ が T-行列であるならば，条件(ii)より $\lim_{n\to\infty}a_{n0}=\lim_{n\to\infty}p_n/P_n=0$. よって $\lim_{n\to\infty}p_n/P_n=0$ は必要条件である．次に

$$0\leqq a_{n\nu}\leqq\frac{p_{n-\nu}}{P_{n-\nu}}\quad(\nu\leqq n)$$

なるゆえ，もし $\lim_{n\to\infty}p_n/P_n=0$ を仮定すると，$\lim_{n\to\infty}a_{n\nu}=0$ $(\nu=0,\ 1,\ \cdots)$ である．すなわちこの条件は十分条件でもある．　（証明終）

定理 7.2. 任意の二つのパーマネントなネールント総和法 $(N,\ p_n)$ と $(N,\ q_n)$ は共存する．

証明． いま $r_n=p_0q_n+p_1q_{n-1}+\cdots+p_nq_0$ とおくと，

$$\begin{aligned}t_n(r)&=\frac{r_ns_0+r_{n-1}s_1+\cdots+r_0s_n}{r_0+r_1+\cdots+r_n}\\&=\frac{p_nq_0s_0+p_{n-1}(q_0s_1+q_1s_0)+\cdots+p_0(q_0s_n+\cdots+q_ns_0)}{p_nq_0+p_{n-1}(q_0+q_1)+\cdots+p_0(q_0+\cdots+q_n)}\\&=\frac{p_nQ_0t_0(q)+p_{n-1}Q_1t_1(q)+\cdots+p_0Q_nt_n(q)}{p_nQ_0+p_{n-1}Q_1+\cdots+p_0Q_n}\end{aligned}$$

である．ここで

$$Q_n=q_0+q_1+\cdots+q_n,\quad t_n(q)=\frac{q_ns_0+\cdots+q_0s_n}{Q_n}$$

とする．いま

$$a_{n\nu}=\begin{cases}\dfrac{p_{n-\nu}Q_\nu}{\sum_{\nu=0}^{n}p_{n-\nu}Q_\nu}, & \text{ただし}\quad \nu\leqq n,\\ 0, & \text{ただし}\quad \nu>n\end{cases}$$

とおくと，上式は

$$t_n(r)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}t_\nu(q)$$

と書ける．行列 $(a_{n\nu})$ が T–行列であることは容易にわかる．ゆえに $(N,q_n)\subseteqq(N,r_n)$ である．同様にして $(N,p_n)\subseteqq(N,r_n)$ も証明される．

もし，ある数列 $\{s_n\}$ が (N,p_n)–$\lim s_n=s$，かつ (N,q_n)–$\lim s_n=t$ であるならば，上に証明したことから (N,r_n)–$\lim s_n=s=t$ である．

(証明終)

この定理はまた次の定理から導くこともできる．

定理 7.3. もし (N,p_n)–総和法がパーマネントで，かつ (N,p_n)–$\lim s_n=s$ ならば，巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty}s_nx^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$ は正の収束半径をもつ．ここで $s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ とする．さらに $\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$ は，$0\leqq x<1$ に対して正則な解析関数 $u(x)$ を定義し，x が実軸上を $x\to1-0$ のとき $u(x)\to s$ となる．

証明. (N,p_n) がパーマネントであることから $(P_n-P_{n-1})/P_n=p_n/P_n=o(1)$ となり，

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n,\qquad p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n$$

は $|x|<1$ で収束する．いま

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}t_nP_nx^n$$

とおく．ここで t_n は (7.1) で定義されている．仮定より $\{t_n\}$ は有界ゆえ，$T(x)$ も $|x|<1$ で収束する．$p_0>0$，$p_n\geqq0$ ゆえ $0\leqq x<1$ において $p(x)>0$，$P(x)>0$ である．ゆえに $T(x)/p(x)$ は原点で正則で，小さな x に対して $w(x)=\sum_{n=0}^{\infty}w_nx^n$ と展開できる．$T(x)=p(x)w(x)$ なるゆえ

$$t_nP_n=p_nw_0+p_{n-1}w_1+\cdots+p_0w_n\quad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．他方

$$t_nP_n=p_ns_0+p_{n-1}s_1+\cdots+p_0s_n\quad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるから $w_n=s_n$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ である．よって $\sum_{n=0}^{\infty}s_nx^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$ は原点で正則である．さらに

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}s_nx^n=(1-x)\frac{T(x)}{p(x)}=\frac{T(x)}{P(x)}$$

で，$T(x)$ と $P(x)$ は $|x|<1$ で正則である．ゆえに $u(x)$ は $|x|<1$ において極を除いて正則で，また実軸上の $0 \leqq x<1$ において正則である．

いま

$$u(x)=\frac{T(x)}{P(x)}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty} t_n P_n x^n}{P(x)}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) t_n$$

とおく．ここで $c_n(x)=P_n x^n/P(x)$ とする．これは数列 $\{t_n\}$ から関数 $u(x)$ への変換式で，関数列 $\{c_n(x)\}$ は定理 2.7 の条件をみたす．ここで $\omega=1$，集合 E として $0 \leqq x<1$ なる実数 x の集合をとる．$t_n \to s$ ならば $u(x) \to s$ である．（証明終）

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が与えられたとき，もし $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ が $0 \leqq x<1$ で正則な解析関数 $u(x)$ を定義して，さらに x が実軸上を $x \to 1-0$ のとき $u(x) \to s$ であるならば，$A^*\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} u_n=s$ または $A^*\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=s$ と書くことにする（§15参照）．ここで $s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ とする．上の定理より，もし (N, p_n) がパーマネントならば $(N, p_n) \subseteqq A^*$ である．この関係は特別な p_n の値に無関係に成り立つから，定理 7.2 は定理 7.3 の系として導かれる．

二つの総和法 (N, p_n)，(N, q_n) がパーマネントとすると，次の四つの巾級数

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n,\quad P(x)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n,\quad q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,\quad Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n$$

は $|x|<1$ で収束する．また巾級数

$$k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n=\frac{q(x)}{p(x)}=\frac{Q(x)}{P(x)}$$

は小さな x に対して収束する．両総和法の強弱に関して次の定理が成り立つ．

定理 7.4.　二つのパーマネントな総和法 (N, p_n)，(N, q_n) が $(N, p_n) \subseteqq (N, q_n)$ であるための必要十分条件は，

$$|k_0|P_n+|k_1|P_{n-1}+\cdots+|k_n|P_0 \leqq HQ_n, \tag{7.2}$$

かつ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{Q_n}=0$$

なることである．ここで H は n に無関係な定数である．もし $\lim_{n\to\infty} P_n=\infty$ ならば，第2条件は省くことができる．

証明． 与えられた数列 $\{s_n\}$ に対して $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ とおく．$t_n(q)=(q_n s_0+\cdots+q_0 s_n)/Q_n$ なるゆえ，小さな x の値に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n t_n(q)\, x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(q_n s_0+\cdots+q_0 s_n)\, x^n=q(x)\, s(x)$$

である．同様に

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n t_n(p)\, x^n=p(x)\, s(x)$$

である．ゆえに

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n t_n(q)\, x^n=\frac{q(x)}{p(x)}\sum_{n=0}^{\infty} P_n t_n(p)\, x^n=\sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} P_n t_n(p)\, x^n$$

が成り立つ．この両辺の x^n の係数を比較すると

$$Q_n t_n(q)=k_n P_0 t_0(p)+k_{n-1}P_1 t_1(p)+\cdots+k_0 P_n t_n(p)$$

である．ゆえに，いま

$$a_{n\nu}=\begin{cases} \dfrac{k_{n-\nu}P_\nu}{Q_n}, & \text{ただし}\quad \nu\leqq n, \\ 0, & \text{ただし}\quad \nu>n \end{cases}$$

とおくと

$$t_n(q)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} t_\nu(p) \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．

行列 $(a_{n\nu})$ に関して，シルバーマン・テープリッツの定理の第1条件は本定理の第1条件にほかならない．同定理の第3条件は

$$k_0 P_n+k_1 P_{n-1}+\cdots+k_n P_n=Q_n \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

より明らか．またシルバーマン・テープリッツの定理の第2条件は本定理の第2条件にほかならないことは，定理 7.1 より任意に固定した ν に対して $Q_{n-\nu}\cong Q_n$ $(n\to\infty)$ なることからわかる．

もし $\lim_{n\to\infty} P_n=\infty$ ならば，任意に大きい G に対して $P_\nu>G$ なる ν が存在する．本定理の第1条件より $G|k_{n-\nu}|\leqq HQ_n$ なるゆえ

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{k_{n-\nu}}{Q_{n-\nu}}\right|\leqq\frac{H}{G}\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n}{Q_{n-\nu}}=\frac{H}{G}$$

である．このようにして．第2条件は第1条件から導かれる．　(証明終)

本節のはじめでネールント総和法の特別の場合として Y-総和法を定義したが，その性質を少し述べよう．

定理 7.5.　もし数列 $\{s_n\}$ が Y-総和可能であるならば $s_n=o(n)$ である．

証明.　$t_0=s_0,\ t_n=\frac{1}{2}(s_{n-1}+s_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ とおく．いま s_n を t_0, $t_1, \cdots, t_n$ で表すために

$$s_k=(-1)^k p_k \quad (k=0, 1, \cdots)$$

とおくと，

$$t_0=p_0, \quad 2(-1)^k t_k=p_k-p_{k-1} \quad (k=1, 2, \cdots)$$

なるゆえ

$$2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t_k-t_0=p_n=(-1)^n s_n \quad (n=0, 1, \cdots)$$

である．ゆえに

$$(-1)^n s_n=2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(t_{2k}-t_{2k+1})+\{1+(-1)^n\}t_n-t_0$$
$$=2\Big(\sum_{0\leqq k<[\sqrt{n}]}+\sum_{[\sqrt{n}]\leqq k\leqq\left[\frac{n-1}{2}\right]}\Big)(t_{2k}-t_{2k+1})+\{1+(-1)^n\}t_n-t_0$$

である．ここで

$$\delta_k=\sup_{\nu\geqq k}|t_\nu-t_{\nu+1}|$$

とおくと，仮定より $\delta_k\searrow 0$ である．ゆえに

$$|s_n|\leqq 2\delta_0\sqrt{n}+\delta_{2[\sqrt{n}]}n+O(1)=o(n). \qquad \text{(証明終)}$$

いま級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ の部分和を s_n とおくと，$u_n=s_n-s_{n-1}$ なるゆえ，次の系が得られる．

系.　もし級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ が Y-総和可能ならば $u_n=o(n)$ である．

これらの結果を使って次の定理を証明しよう．

定理 7.6.　$$Y\subseteqq(C, 1).$$

証明.　$t_0=s_0,\ t_n=\frac{1}{2}(s_{n-1}+s_n)$ $(n=1, 2, \cdots)$ とおくと，

$$\frac{1}{n+1}(s_0+s_1+\cdots+s_n)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{s_0+\frac{1}{2}(s_0+s_1)+\cdots+\frac{1}{2}(s_{n-1}+s_n)\right\}-\frac{s_0-s_n}{2(n+1)}$$

$$=\frac{1}{n+1}\{t_0+t_1+\cdots+t_n\}-\frac{s_0-s_n}{2(n+1)}$$

である．もし $Y\text{-}\lim_{n\to\infty}s_n=s$ ならば，すなわち $\lim_{n\to\infty}t_n=s$ ならば，§1 より $\lim_{n\to n}\frac{1}{n+1}\{t_0+t_1+\cdots+t_n\}=s$，かつ前定理より $\lim_{n\to\infty}\frac{s_0-s_n}{2(n+1)}=0$ である．

（証明終）

定理 7.7. Y-総和法は巾級数の収束半径をこえて総和することはできない．

証明. $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ が一点 z_0, $|z_0|=\gamma$, で Y-総和可能とすると，定理 7.5 より $n\geqq 1$ に対して $|a_n|\gamma^n\leqq Mn$，すなわち $\sqrt[n]{|a_n|}\leqq\frac{1}{\gamma}\sqrt[n]{Mn}$．ゆえに

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\leqq\frac{1}{\gamma}$$

である．よってコーシー・アダマールの定理より $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ は $|z|<\gamma$ で収束する．いま $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ の収束半径を r とし，仮りにこの巾級数が $|z_0|=\gamma>r$ なる点 z_0 で Y-総和可能であると仮定すれば，上述のことから $|z|=\frac{1}{2}(\gamma+r)>r$ なる点 z で $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ は収束しなければならない．これは矛盾である．

（証明終）

いま数列 $\{\lambda_n\}$ は $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$, $\lambda_n\to\infty$ とし，a_n $(n=1, 2, \cdots)$ は実数または複素数とする．$s=\sigma+i\tau$ を複素変数とするとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\lambda_ns} \tag{7.3}$$

を λ_n **型のディィリクレ級数**という．特に $\lambda_n=\log n$ のとき，すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}$$

を**通常ディィリクレ級数**という．

さて Y-総和法は巾級数に対しては上述のように有効でないが，ディィリクレ級数に対しては有効であることを次に示そう．一般にディィリクレ級数について次の定理はよく知られている．

定理 7.8. ディィリクレ級数 (7.3) はすべての複素数値 $s=\sigma+i\tau$ に対し

て収束するか，いかなる複素数値に対しても収束しないか，あるいはある s に対して収束し，ある s に対して発散する．この最後の場合には，ある有限の実数 σ_0 があって，級数は $\sigma>\sigma_0$ なるすべての s に対して収束し，$\sigma<\sigma_0$ なるすべての s に対して発散する．

すなわちディリクレ級数の収束する範囲は半平面である．また直線 $\sigma=\sigma_0$ を**収束直線**という．定理 7.8 は次のより一般的な定理の系としてでてくる．

定理 7.9.　もしディリクレ級数 (7.3) が $s=s_0$ に対して収束するならば，それは $|\arg(s-s_0)|\leqq\alpha$ [1] で与えられる s-平面上の集合において一様収束する．ここで α は $0\leqq\alpha<\frac{1}{2}\pi$ なる任意の実数とする．

証明.　$s_0=0$ としても一般性を失わない．
いま $A(p, n)=a_p+\cdots+a_n$ とおくと，アーベルの変換により

$$\sum_{n=p}^{q}a_ne^{-\lambda_ns}=\sum_{n=p}^{q-1}A(p, n)\Delta e^{-\lambda_ns}+A(p, q)e^{-\lambda_qs}$$

である．また $\sigma>0$ $(s=\sigma+i\tau)$ に対して

$$|\Delta e^{-\lambda_ns}|=|e^{-\lambda_ns}-e^{-\lambda_{n+1}s}|=\left|\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}se^{-us}du\right|$$
$$\leqq|s|\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}e^{-u\sigma}du=\frac{|s|}{\sigma}\Delta e^{-\lambda_n\sigma}$$

である．

任意に $\varepsilon>0$ を与えるとき，p_0 を十分大きくとり，$n\geqq p\geqq p_0$ に対し

$$\lambda_p>0,\quad \text{かつ}\quad |A(p, n)|<\varepsilon\cos\alpha$$

であるようにする．$|s|/\sigma\leqq\sec\alpha$ なる s に対し，

$$\left|\sum_{n=p}^{q}a_ne^{-\lambda_ns}\right|<\varepsilon\left(\sum_{n=p}^{q-1}\Delta e^{-\lambda_n\sigma}+e^{-\lambda_q\sigma}\right)=\varepsilon e^{-\lambda_p\sigma}<\varepsilon$$

である．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

例.　(i)　$\sum_{n=1}^{\infty}a^nn^{-s}$ $(|a|<1)$ はすべての s の値に対し収束する．

(ii)　$\sum_{n=1}^{\infty}a^nn^{-s}$ $(|a|>1)$ はすべての s の値に対し発散する．

(iii)　$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ は $\sigma=1$ を収束直線とする．かつ，この直線上のすべての点で級数は発散する．

---

1)　$s=re^{i\theta}$ のとき $\arg s=\theta$ と書く．

(iv) $\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^{-2}n^{-s}$ は $\sigma=1$ を収束直線とする．かつ，この直線上のすべての点で級数は収束する．

s を複素数とするとき，ディリクレ級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^s}$ は $\mathfrak{R}(s)>0$ に対して収束する． この級数は $\mathfrak{R}(s)>-1$ に対して Y-総和可能であることを示そう．ここで $\mathfrak{R}$ は複素数の実数部を表す．

Y-総和法を与える変換式は，$t_0=s_0$,

$$t_n=\frac{1}{2}(s_{n-1}+s_n)=\frac{1}{2}u_0+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(u_{\nu-1}+u_\nu)\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

である．ここで $u_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)^s}$ を代入すると，

$$\begin{aligned}t_n&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^s}+\frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)^s}\right\}\\&=\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\int_\nu^{\nu+1}\frac{dx}{x^{s+1}}.\end{aligned}$$

となる．

もし s が実数で $s>-1$ ならば

$$0<\int_{\nu+1}^{\nu+2}\frac{dx}{x^{s+1}}<\frac{1}{(\nu+1)^{s+1}}<\int_\nu^{\nu+1}\frac{dx}{x^{s+1}}$$

なるゆえ，$\int_\nu^{\nu+1}\frac{dx}{x^{s+1}}$ は単調に減少して 0 に収束する．よって，このような s に対しては交項級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\int_\nu^{\nu+1}\frac{dx}{x^{s+1}}$$

は収束する．もし $s\leqq-1$ ならば $\lim_{n\to\infty}t_n$ は明らかに発散する．

次に，この交項級数は $s\geqq-1+\varepsilon$ において，s に関して一様収束することを示そう，ここで $\varepsilon>0$ は任意とする．いま，

$$r(s,\ n)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\int_\nu^{\nu+1}\frac{dx}{x^{s+1}},\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

とおくと，交項級数の性質より

$$|r(s,\ n)|\leqq\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^{s+1}}<\frac{1}{n^\varepsilon},\quad s\geqq-1+\varepsilon,\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

である．$n\to\infty$ のとき，この右辺は s に無関係に 0 に収束するから，求め

る一様収束性は証明された．

さて，$s>-1$ に対して

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{1}{(u+\nu)^{s+1}}\right|<\frac{1}{(u+n)^{s+1}}<\frac{1}{n^{s+1}},\quad 0\leqq u\leqq 1,$$

なるゆえ，級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{1}{(u+\nu)^{s+1}}$ は $0\leqq u\leqq 1$ において u に関して一様収束する．よって

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{dx}{x^{s+1}}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\int_0^1\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{1}{(u+\nu)^{s+1}}\right\}du$$

である．このようにしても，s が実数で $s>-1$ のときには，ディリクレ級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^s}$ は Y–総和可能であることがわかる．一般の $\Re(s)>-1$ なる複素数 s に対しても同様であることは，上と同じ方法で容易に証明される．

ディリクレ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$$

が収束する範囲は，すでに述べたように $\Re(s)>\sigma_0$ である（σ_0 は有限または無限）．この級数の Y–総和可能な範囲もまた $\Re(s)>\sigma_1$（ここで $\sigma_1\leqq\sigma_0$）なる s の集合であることも証明される．

§8.　リース総和法

数列 $0\leqq\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\cdots$，$\lambda_n\to\infty$ と $k\geqq 0$ が与えられている．級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ に対して

$$U_{\lambda}^{(0)}(\omega)=U_{\lambda}(\omega)=U(\omega)=\sum_{\lambda_\nu<\omega}u_\nu,$$
$$(8.1)\qquad U_{\lambda}^{(k)}(\omega)=U^{(k)}(\omega)=\sum_{\lambda_\nu<\omega}(\omega-\lambda_\nu)^k u_\nu$$
$$=k\int_0^{\omega}(\omega-t)^{k-1}U(t)\,dt\quad(k>0)$$

とおく．もし

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{U^{(k)}(\omega)}{\omega^k}=s$$

ならば，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ は値 s に**リース** $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{k})$-**総和可能**であるという[1]．また，このリース総和法は λ **型** k **次**であるといい，ディリクレ級数への広い応用をもつ．$U^{(k)}(\omega)/\omega^k$ を**リース平均**ともいう．

容易にわかるように $U(\omega)$ は不連続関数であるが，$U^{(k)}(\omega)$ は $k>0$ に対して連続関数である．また $k>1$ に対しては $U^{(k)}(\omega)$ は連続な導関数をもち

$$\frac{d}{d\omega}U^{(k)}(\omega)=kU^{(k-1)}(\omega) \tag{8.2}$$

である．もし k が自然数で $\omega \neq \lambda_n$ のときには

$$\frac{d^k}{d\omega^k}U^{(k)}(\omega)=k!\,U(\omega) \tag{8.3}$$

となる．

特に $\lambda_n=n$ $(n=0, 1, \cdots)$ とすると，任意の $k \geqq 0$ に対して $(R, n, k) \cong (C, k)$ となる（定理 8.9 参照）．

主要定理を証明するために少々の準備をしよう．

定理 8.1. $\varphi(x)$ は $[a, \infty)$ で定義された正の関数で $\int^{\infty}\varphi(t)\,dt$ が発散し，また $f(x)$ は $f(x)=o(\varphi(x))$ $(x\to\infty)$ なる関数とすると，$\int^{x}f(t)\,dt = o\left(\int^{x}\varphi(t)\,dt\right)$ である．

定理 8.2. $\varphi(x)$, $\psi(x)$ は x の連続関数で，$x\to\infty$ のとき

$$\varphi(x)\cong\alpha x^r, \quad \psi(x)\cong\beta x^s \quad (r, s\geqq 0)^{2)}$$

であるならば，

$$\int_0^x \varphi(t)\psi(x-t)\,dt \cong \alpha\beta\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}x^{r+s+1}$$

である．この定理は §6 の定理 6.2 に対応する．

証明. $\varphi(t)=\alpha t^r+\varphi_1(t)$, $\psi(t)=\beta t^s+\psi_1(t)$ とおく．ここで $\varphi_1(t)=o(t^r)$, $\psi_1(t)=o(t^s)$ である．この φ, ψ を上の積分に代入すると四つの積分がでる．その第1は

$$\alpha\beta\int_0^x t^r(x-t)^s\,dt=\alpha\beta\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}x^{r+s+1}$$

---

1) この定義から明らかなように $(R, \lambda_n, 0)$-総和法は収束と同値である．

2) この定理は $r, s>-1$ に対しても成り立つ．巻末の S. Chapman の論文参照．

である．残りの積分については，三つとも $o(x^{r+s+1})$ となる．たとえば

$$I(x)=\alpha\int_0^x t^r\psi_1(x-t)\,dt=\alpha\int_0^x (x-t)^r\psi_1(t)\,dt$$

を考える．任意の $\varepsilon>0$ に対して ξ を適当にとり，$x\geqq t\geqq\xi$ に対して $|\psi_1(t)|<\varepsilon t^s$ であるようにする．また $0\leqq t\leqq\xi$ に対しては $|\psi_1(t)|<M(\xi)$ であるような $M(\xi)$ が存在する．すると

$$|I(x)|<|\alpha|\left\{\varepsilon\int_0^x (x-t)^r t^s dt+\xi M(\xi)x^r\right\}=o(x^{r+s+1})$$

である．他の二つの積分についても同様である．（証明終）

定理 8.3. （i） もし $k>0$, $l>0$ ならば

$$U^{(k+l)}(\omega)=\frac{\Gamma(k+l+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(l)}\int_0^\omega (\omega-t)^{l-1}U^{(k)}(t)\,dt \tag{8.4}$$

である[3]．

（ii） $k>0$, $0<l<1$ とする．もし $k>l$，あるいは $k=l$ で $\omega\neq\lambda_n$ とすると

$$U^{(k-l)}(\omega)=\frac{\Gamma(k-l+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1-l)}\int_0^\omega (\omega-t)^{-l}\frac{dU^{(k)}(t)}{dt}dt$$

である．

証明. （i） $U^{(k)}(t)$ の積分表示により

$$\begin{aligned}\int_0^\omega (\omega-t)^{l-1}U^{(k)}(t)\,dt&=k\int_0^\omega(\omega-t)^{l-1}dt\int_0^t (t-u)^{k-1}U(u)\,du\\&=k\int_0^\omega U(u)\,du\int_u^\omega(\omega-t)^{l-1}(t-u)^{k-1}dt\\&=\frac{k\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)}\int_0^\omega U(u)(\omega-u)^{k+l-1}du\\&=\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l+1)}U^{(k+l)}(\omega)\end{aligned}$$

である．特に $l=1, 2, \cdots$ のときには

$$U^{(k+l)}(\omega)=(k+1)(k+2)\cdots(k+l)\left(\int_0^\omega du\right)^l U^{(k)}(u)$$

である．

（ii） (8.2), (8.3) と（i）より

---

3) $k=0$, $l>0$ のときは (8.4) は (8.1) となる．

$$U^{(k-l)}(\omega)=\frac{1}{k-l+1}\frac{d}{d\omega}U^{(k-l+1)}(\omega)$$
$$=\frac{\Gamma(k-l+2)}{(k-l+1)\Gamma(k+1)\Gamma(1-l)}\frac{d}{d\omega}\int_0^{\omega}(\omega-t)^{-l}U^{(k)}(t)\,dt$$

である．ここで部分積分により

$$\int_0^{\omega}(\omega-t)^{-l}U^{(k)}(t)\,dt=\frac{1}{1-l}\int_0^{\omega}(\omega-t)^{1-l}\frac{dU^{(k)}(t)}{dt}dt$$

なるゆえ，この左辺を ω で微分すると

$$\int_0^{\omega}(\omega-t)^{-l}\frac{dU^{(k)}(t)}{dt}dt$$

である． (証明終)

定理 8.4. (**リースの平均値定理**) もし u_n が実数で， $0\leqq\xi\leqq\omega$， かつ $0<k\leqq 1$ ならば，

$$|g(\xi,\omega)|\equiv\left|k\int_0^{\xi}(\omega-t)^{k-1}U(t)\,dt\right|\leqq\max_{0\leqq t\leqq\xi}|U^{(k)}(t)|$$

である．

証明． $k=1$ のときは明らかである． $0<k<1$ のときを考える． 前定理 (ii) で $k=l$ とすると

$$U(t)=\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(1-k)}\int_0^{t}(t-u)^{-k}\frac{dU^{(k)}(u)}{du}du$$

なるゆえ

$$(8.5)\qquad \begin{aligned} g(\xi,\omega)&=\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^{\xi}(\omega-t)^{k-1}dt\int_0^{t}(t-u)^{-k}\frac{dU^{(k)}(u)}{du}du^{4)}\\ &=\int_0^{\xi}h(u)\frac{dU^{(k)}(u)}{du}du \end{aligned}$$

である．ここで

$$h(u)=\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_u^{\xi}(\omega-t)^{k-1}(t-u)^{-k}dt$$
$$=1-\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_{\xi}^{\omega}(\omega-t)^{k-1}(t-u)^{-k}dt$$

---

4) ガンマ関数の公式

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{-k}dx=\Gamma(k)\Gamma(1-k)=\frac{\pi}{\sin k\pi}\quad(0<k<1)$$

を使う．

とおく．もし t が ξ と ω の間のきまった数で，$0\leqq u\leqq\xi$ とすると $(t-u)^{-k}$ は u の単調増加関数である．ゆえに $h(u)$ は単調減少関数で，かつ $0\leqq h(u)\leqq 1$ である．(8.5) の積分に第2平均値定理を適用すると

$$g(\xi,\omega)=h(0)U^{(k)}(\eta)\quad(0\leqq\eta\leqq\xi)$$

である．（証明終）

定理 8.5.　もし $0\leqq k<k'$ ならば $(R,\lambda_n,k)\subseteqq(R,\lambda_n,k')$ である．

証明.　$k'=k+l$ とおくと，定理 8.3 (i) より (8.4) が成り立つ．定理の仮定より $U^{(k)}(t)\cong st^k$ なるゆえ，定理 8.2 より $U^{(k+l)}(\omega)\cong s\omega^{k+l}$ である．（証明終）

系.　任意の $k\geqq 0$ に対して総和法 (R,λ_n,k) はパーマネントである．

この定理は同一の型で次数の異なる二つのリース総和法の比較であるが，同一の次数で型の異なる場合には次の定理が成り立つ．

定理 8.6.　もし $\lambda_n=e^{\mu_n}$ $(n=0,1,\cdots)$ ならば $(R,\lambda_n,k)\subseteqq(R,\mu_n,k)$ である．

証明.　$(R,\lambda_n,k)-\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s=0$ と仮定しても一般性を失わない．なぜならば $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ において u_0 の代りに u_0-s とすればよいからである．したがって

$$\int_1^w(w-t)^{k-1}U_\lambda(t)\,dt=o(w^k)\tag{8.6}$$

から

$$\int_0^\omega(\omega-\tau)^{k-1}U_\mu(\tau)\,d\tau=o(\omega^k)\tag{8.7}$$

を導けばよい．

いま $\omega=\log w$, $\tau=\log t$ とおくと定義より $U_\mu(\log t)=U_\lambda(t)$ である．ゆえに (8.7) は

$$\int_1^w(\log w-\log t)^{k-1}U_\lambda(t)\frac{dt}{t}=o(\log w)^k\tag{8.8}$$

と書ける．k の値により三つの場合に分けて証明する．

(i)　k が整数のときには

$$U_\lambda(t)=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}U_\lambda{}^{(k)}(t)$$

を (8.8) に代入して k 回部分積分すると，積分記号を含なまい項は

$$U_\lambda^{(k)}(w)\left[\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\frac{(\log w-\log t)^{k-1}}{t}\right]_{t=w}$$
$$=(-1)^{k-1}(k-1)!\,w^{-k}U_\lambda^{(k)}(w)=o(1)$$

の定数倍である．また積分記号を含む項は

$$\int_1^w\left\{\frac{d^k}{dt^k}\frac{(\log w-\log t)^{k-1}}{t}\right\}U_\lambda^{(k)}(t)\,dt \tag{8.9}$$

の定数倍である．ここで定数 $H_{r,s}$ を使って

$$\frac{d^k}{dt^k}\frac{(\log w-\log t)^{k-1}}{t}=t^{-k-1}\sum H_{r,s}(\log w)^r(\log t)^s\quad(r+s\leqq k-1)$$

と表される．さらに定理 8.1 より

$$(\log w)^r\int_1^w t^{-k-1}(\log t)^s U_\lambda^{(k)}(t)\,dt=(\log w)^r\int_1^w(\log t)^s o\left(\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=o(\log w)^{r+s+1}=o(\log w)^k$$

であるから，(8.9) は $o(\log w)^k$ である．

(ii) $0<k<1$ のとき，もし u_n が複素数ならば，実数部分と虚数部分とに分ければよいから，u_n を実数と仮定しても一般性を失わない．前定理より $(R,\lambda_n,k)\subseteqq(R,\lambda_n,1)$ である．ゆえに仮定より $U_\lambda^{(1)}(t)=o(t)$ である．すなわち任意の $\varepsilon>0$ に対して $\nu>1$ を適当にえらび，

$$U_\lambda^{(1)}(t)<\varepsilon t\quad(t\geqq\nu)$$

とできる．また M を $|U_\lambda^{(1)}(t)|<M$ $(1\leqq t\leqq\nu)$ なる数とする．

次に $w>3\nu$ なる w をとり，(8.8) の左辺の積分を次の三つの部分に分ける:

$$\int_1^\nu+\int_\nu^{w/3}+\int_{w/3}^w=J_1+J_2+J_3.$$
$$|J_1|<M\nu\left(\log\frac{w}{\nu}\right)^{k-1}=o(\log w)^k$$

は明らか．次に部分積分により

$$J_2=\left[(\log w-\log t)^{k-1}\frac{U_\lambda^{(1)}(t)}{t}\right]_\nu^{w/3}$$
$$+\int_\nu^{w/3}\left\{(k-1)\left(\log\frac{w}{t}\right)^{k-2}+\left(\log\frac{w}{t}\right)^{k-1}\right\}\frac{U_\lambda^{(1)}(t)}{t^2}dt$$

である．この第1項の絶対値は ε の定数倍より小さい．第2項の絶対値は

$$<\varepsilon\int_{\nu}^{w/3}\left(\log\frac{w}{t}\right)^{k-1}\frac{dt}{t}<\frac{\varepsilon}{k}\left(\log\frac{w}{\nu}\right)^{k}<\frac{\varepsilon}{k}(\log w)^{k}$$ 5)

である．ゆえに十分大きな w に対して

$$|J_2|<\frac{2\varepsilon}{k}(\log w)^{k}$$

である．

最後に第2平均値定理より

$$J_3=\frac{3}{w}\int_{w/3}^{\xi}(\log w-\log t)^{k-1}U_\lambda(t)\,dt$$
$$=\frac{3}{w}\int_{w/3}^{\xi}\left(\frac{\log w-\log t}{w-t}\right)^{k-1}(w-t)^{k-1}U_\lambda(t)\,dt\quad\left(\frac{1}{3}w\leqq\xi\leqq w\right)$$

である．ここで関数

$$\left(\frac{\log w-\log t}{w-t}\right)^{k-1}$$

は $1<t<w$ で単調に増加して，$t\to w$ のとき w^{1-k} に近づく．ゆえに第2平均値定理より

$$|J_3|=\frac{3}{w}\left(\frac{\log w-\log\xi}{w-\xi}\right)^{k-1}\left|\int_{\xi_1}^{\xi}(w-t)^{k-1}U_\lambda(t)\,dt\right|$$
$$\leqq 3w^{-k}\left|\int_{\xi_1}^{\xi}(w-t)^{k-1}U_\lambda(t)\,dt\right|\quad\left(\frac{1}{3}w\leqq\xi_1\leqq\xi\leqq w\right)$$

である．定理 8.4 より

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi}(w-t)^{k-1}U_\lambda(t)\,dt\right|\leqq\frac{2}{k}\max_{\frac{w}{3}\leqq t\leqq w}|U_\lambda^{(k)}(t)|$$

である．仮定より $U_\lambda^{(k)}(t)=o(t^k)$ であるから

$$J_3=o(1)=o(\log w)^{k}.$$

このようにして (8.8) が証明された．

(iii)　$k>1$ なる整数でない k のときには $k'=[k]$ とし，(8.8) の左辺に k' 回部分積分を行い，$U_\lambda(t)$ の代りに $U_\lambda^{(k')}(t)$ が入った式を（ii）と同

---

5)　$0<1-k<1$ で $\log 3>1$ なるゆえ

$$\left(\log\frac{w}{t}\right)^{k-2}<\left(\log\frac{w}{t}\right)^{k-1}\quad\left(\nu<t<\frac{1}{3}w\right)$$

である．

様に行う. (証明終)

$(R,\ \lambda_n,\ k)$-$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ であるとは，すでに述べたように $\lim_{\omega\to\infty}\frac{U_\lambda^{(k)}(\omega)}{\omega^k}=s$ なることであるが，ここで連続的に $\omega\to\infty$ とする代りに λ_n を伝わって不連続的に $\to\infty$ であるとき，すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_\lambda^{(k)}(\lambda_n)}{\lambda_n{}^k}=s$$

であるとき，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ は値 s に**リース不連続総和可能**といい $(R^*,\ \lambda_n,\ k)$-$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ と書く[6]. 明らかに

$$(R,\ \lambda_n,\ k)\subseteqq(R^*,\ \lambda_n,\ k)$$

である. ここで $0\leqq k\leqq 1$ のときには，さらに $(R,\ \lambda_n,\ k)\cong(R^*,\ \lambda_n,\ k)$ であるが，$k>1$ に対しては一般にはこのようにはならない. 前者はユルカートにより，後者はカットナーにより証明された. 本書では前者だけを証明しよう. 次の定理はリースの平均値定理 8.4 に対応する.

定理 8.7. (**ユルカートの定理**) もし $\lambda_n\leqq\omega$，$0<k\leqq 1$ ならば，

$$\left|k\int_0^{\lambda_n}(\omega-t)^{k-1}U(t)\,dt\right|\leqq\max_{m=0,1,\cdots,n}|U^{(k)}(\lambda_m)|$$

である.

証明.

$$k\int_0^{\lambda_n}(\omega-t)^{k-1}U(t)\,dt=\sum_{\nu=1}^{n}k\int_{\lambda_{\nu-1}}^{\lambda_\nu}(\omega-t)^{k-1}s_{\nu-1}dt$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{c(\omega,\ \nu)}{c(\lambda_n,\ \nu)}c(\lambda_n,\ \nu)\,s_{\nu-1},$$

ここで

$$c(\omega,\ \nu)=k\int_{\lambda_{\nu-1}}^{\lambda_\nu}(\omega-t)^{k-1}dt$$

とする. 微分に関するコーシーの平均値定理より

$$\frac{c(\omega,\ \nu)}{c(\lambda_n,\ \nu)}=\left(\frac{\omega-t_\nu}{\lambda_n-t_\nu}\right)^{k-1}\quad(\lambda_{\nu-1}<t_\nu<\lambda_\nu)$$

---

6) $k<0$ のときには $U_\lambda^{(k)}(\omega)$ は，$u_\nu\neq 0$ なる λ_ν の右近傍で有界でないから，$(R,\ \lambda_n,\ k)$-総和法を定義することはできない. しかし $(R^*,\ \lambda_n,\ k)$-総和法は任意の $k<0$ に対しても定義される.

なる t_ν がある．ゆえに $\dfrac{c(\omega,\nu)}{c(\lambda_n,\nu)}$ は ν が大きくなるとき単調に減少して，かつ，その値は0と1の間にある．ゆえにアーベルの変換により[7)]

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{c(\omega,\nu)}{c(\lambda_n,\nu)}c(\lambda_n,\nu)s_{\nu-1}\right|\leqq\left|\sum_{\nu=1}^{n_1}c(\lambda_n,\nu)s_{\nu-1}\right|\quad(0\leqq n_1\leqq n)$$

であるような整数 n_1 がある．この式を積分の形で書くと

$$\left|k\int_0^{\lambda_n}(\omega-t)^{k-1}U(t)\,dt\right|\leqq\left|k\int_0^{\lambda_{n_1}}(\lambda_n-t)^{k-1}U(t)\,dt\right|\quad(0\leqq n_1\leqq n)$$

である．この右辺にこの操作を繰り返すと

$$\left|k\int_0^{\lambda_{n_i}}(\lambda_{n_{i-1}}-t)^{k-1}U(t)\,dt\right|\leqq\left|k\int_0^{\lambda_{n_{i+1}}}(\lambda_{n_i}-t)^{k-1}U(t)\,dt\right|$$

$$(0\leqq\cdots\leqq n_2\leqq n_1\leqq n)$$

なる整数列 $\{n_i\}$ が得られる．しかも少なくとも一つの i に対して $n_i=n_{i+1}$ である．この共通の $n'=n_i=n_{i+1}$ に対しては

$$\left|k\int_0^{\lambda_n}(\omega-t)^{k-1}U(t)\,dt\right|\leqq\left|k\int_0^{\lambda_{n'}}(\lambda_{n'}-t)^{k-1}U(t)\,dt\right|=\left|U^{(k)}(\lambda_{n'})\right|$$

である．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

注意 8.7.　$k>1$ に対してはこの定理が成立しないことを $U(t)\equiv1$ について試みよ．

定理 8.8.（ユルカートの定理）　$0<k\leqq1$ とする．$\eta(\omega)$ は $\omega\geqq0$ で定義された単調増加関数とし，$\eta(\omega)>0$ $(\omega\geqq0)$，$\lim_{\omega\to\infty}\eta(\omega)=\infty$ で，さらに関数 $\dfrac{\omega}{\eta(\omega)}$ は ω の単調増加関数とすると，次の二つの式は同値である：

$$U^{(k)}(\omega)=o(\eta(\omega))^k,\tag{8.10}$$

$$U^{(k)}(\lambda_n)=o(\eta(\lambda_n))^k.\tag{8.11}$$

特に $\eta(\omega)=\omega$ とすると，$\lim_{\omega\to\infty}\dfrac{U^{(k)}(\omega)}{\omega^k}=s$ と $\lim_{n\to\infty}\dfrac{U^{(k)}(\lambda_n)}{\lambda_n{}^k}=s$ とは同値である．すなわち $(R,\lambda_n,k)\cong(R^*,\lambda_n,k)$．

証明．　(8.11) から (8.10) を導けばよい．まず

$$s_n=o\left(\frac{\eta(\lambda_{n+1})}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\right)^k\tag{8.12}$$

を示そう．前定理より

7)　$\dfrac{c(\omega,\nu)}{c(\lambda_n,\nu)}=a_\nu$，$c(\lambda_n,\nu)s_{\nu-1}=b_\nu-b_{\nu-1}$ とし，$\sum a_\nu(b_\nu-b_{\nu-1})$ にアーベル変換を行い，a_ν が単調減少なることを使う．

$$\left|k\int_0^{\lambda_n}(\lambda_{n+1}-t)^{k-1}U(t)\,dt\right| \leqq \max_{m=0,1,\cdots,n}|U^{(k)}(\lambda_m)| = o(\eta(\lambda_n))^k$$

である．ゆえに

$$k\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}(\lambda_{n+1}-t)^{k-1}U(t)\,dt = o(\eta(\lambda_{n+1}))^k + o(\eta(\lambda_n))^k,$$

すなわち $s_n(\lambda_{n+1}-\lambda_n)^k = o(\eta(\lambda_{n+1}))^k$ である．

前定理と (8.11) から

$$U^{(k)}(\omega) = k\int_0^{\lambda_n}(\omega-t)^{k-1}U(t)\,dt + k\int_{\lambda_n}^{\omega}(\omega-t)^{k-1}U(t)\,dt$$
$$= o(\eta(\lambda_n))^k + s_n\left(\frac{\omega-\lambda_n}{\eta(\omega)}\right)^k(\eta(\omega))^k \qquad (\lambda_n < \omega \leqq \lambda_{n+1})$$

である．ここで仮定より

$$\frac{\omega-\lambda_n}{\eta(\omega)} \leqq \frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\eta(\lambda_{n+1})}$$

なるゆえ，(8.12) より

$$U^{(k)}(\omega) = o(\eta(\omega))^k$$

である．　(証明終)

注意 8.8. (8.10), (8.11) 式で o の代りに O としてもこの定理は成り立つ．

(R, λ_n, k)-総和法で特に $\lambda_n = n$ とすると (C, k)-総和法となることは，本節のはじめで述べたとおりであるが，一般の $k \geqq 0$ についての証明はやめて次の定理を証明をするにとどめよう[8]．

定理 8.9. $\quad (R, n, k) \cong (C, k) \qquad (k=0, 1, \cdots).$

証明. 和 $s=0$ と仮定しても一般性を失わない．§6 で述べたように (C, k)-$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 0$ は $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} = 0$，すなわち

$$S_n^{(k)} = o(n^k) \tag{8.13}$$

ということである．ここで $S_n^{(k)}$ は (6.4) で与えたように

$$S_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu+k}{k}u_\nu$$

である．また (R, n, k)-$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 0$ は

8) 一般の $k \geqq 0$ についての証明は，たとえば Hobson [12] pp. 90–98 参照．

$$U^{(k)}(\omega)=o(\omega^k) \tag{8.14}$$

ということである．ここで $U^{(k)}(\omega)=\sum_{\nu<\omega}(\omega-\nu)^k u_\nu$ である．

まず (8.13) から (8.14) を示そう．$\omega=n+\theta$ とおく．ここで n は整数で $0<\theta\leqq 1$ とする．$U^{(k)}(\omega)=\sum_{\nu=0}^{n}(n-\nu+\theta)^k u_\nu$ なるゆえ

$$\sum_{n=0}^{\infty}U^{(k)}(\omega)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\theta)^k x^n\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n=g(x,\theta)\sum_{n=0}^{\infty}S_n{}^{(k)}x^n$$

である．ここで

$$g(x,\theta)=(1-x)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\theta)^k x^n$$
$$=(1-x)^{k+1}x^{-\theta}\left(x\frac{d}{dx}\right)^k\frac{x^\theta}{1-x}=\sum_{j=0}^{k}c_j(\theta)x^j$$

とおく．$c_j(\theta)$ は θ に関する k 次の多項式である．ゆえに

$$\sum_{n=0}^{\infty}U^{(k)}(\omega)x^n=\sum_{j=0}^{k}c_j(\theta)x^j\sum_{n=0}^{\infty}S_n^{(k)}x^n,\qquad U^{(k)}(\omega)=\sum_{\nu=0}^{k}c_\nu(\theta)S_{n-\nu}^{(k)}$$

である．よって θ に関して一様に

$$\left|\frac{U^{(k)}(\omega)}{\omega^k}\right|\leqq\sum_{\nu=0}^{k}|c_\nu(\theta)|\left|\frac{S_{n-\nu}^{(k)}}{n^k}\right|=o(1)$$

である．

次に (8.14) から (8.13) を示そう．$0<\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_k<1$ なる $k+1$ 個の θ を任意にとり，

$$\binom{n+k}{k}=\sum_{r=0}^{k}q_r(n+\theta_r)^k$$

が n を変えたときつねに成り立つように $q_0, q_1, \cdots, q_k$ をきめつけることができる．なぜならば，両辺を n の巾で展開してその係数を等しいとすると，q に関する連立方程式

$$\sum_{r=0}^{k}\theta_r{}^j q_r=C_j\qquad(j=0,1,\cdots,k)$$

得られ，かつ，この係数からつくられる行列式は $\prod_{l>m}(\theta_l-\theta_m)\neq 0$ なるゆえ．

さて

$$S_n^{(k)}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu+k}{k}u_\nu=\sum_{\nu=0}^{n}u_\nu\sum_{r=0}^{k}q_r(n-\nu+\theta_r)^k$$

$$=\sum_{r=0}^{k} q_r \sum_{\nu=0}^{n} (n-\nu+\theta_r)^k u_\nu = \sum_{r=0}^{k} q_r U^{(k)}(n+\theta_r)$$

なるゆえ，仮定より

$$S_n^{(k)}=o(n^k)$$

である． (証明終)

さて，すでに述べたように，一般の $\{\lambda_n\}$ については

$$(R,\ \lambda_n,\ k) \cong (R^*,\ \lambda_n,\ k) \qquad (0 \leqq k \leqq 1),$$
$$(R,\ \lambda_n,\ k) \not\cong (R^*,\ \lambda_n,\ k) \qquad (k>1)$$

である．いまわかったように

$$(R,\ n,\ k) \cong (C,\ k) \qquad (k \geqq 0)$$

である．それでは $(R,\ n,\ k)$ と $(R^*,\ n,\ k)$ の間にはどのような関係があるであろうか．すでに本節脚註 6) で述べたように，$(R,\ n,\ k)$ は $k \geqq 0$ に対してのみ定義されるのに反し，$(R^*,\ n,\ k)$ は任意の実数 k に対して意味をもつ．他方 (C,k) は $k>-1$ に対して定義されている．それゆえ $(R,\ n,\ k)$ と $(R^*,\ n,\ k)$ の関係の代りに，$(C,\ k)$ と $(R^*,\ n,\ k)$ の関係をしらべることにしよう．リース，パイエリムホフ，カットナーにより，次のことが知られている．

定理 8.10. $(C,\ k) \cong (R^*,\ n,\ k) \qquad (-1<k<2),$
$(C,\ k) \not\cong (R^*,\ n,\ k) \qquad (k \geqq 2).$ (証明略)

$(R,\ \lambda_n,\ k)$-総和法で特に $\lambda_n=\log(n+1)$, $k=1$ とするとどのようになるであろうか．いま数列 $\{s_n\}$ が与えられたとき，もし

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log(n+1)}\left(s_0+\frac{s_1}{2}+\cdots+\frac{s_n}{n+1}\right)=s \tag{8.15}$$

ならば，$\{s_n\}$ は値 s に**対数 (l) 総和可能**という[9]．次の定理が成り立つ．

定理 8.11. $(R,\ \log(n+1),\ 1) \cong l.$

証明. 定理 8.8 より $(R,\ \log(n+1),\ 1) \cong (R^*,\ \log(n+1),\ 1)$ であるから，$(R^*,\ \log(n+1),\ 1) \cong l$ を示せばよい．さて $(R^*,\ \log(n+1),\ 1)\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$ は $\lim_{n\to\infty}\dfrac{U^{(1)}(\lambda_n)}{\lambda_n}=s$，すなわち

9) §15 で対数 (L) 総和法を定義する．

(8.16) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{\nu=0}^{n-1}s_\nu\log\frac{\nu+2}{\nu+1}=s$$

と書ける．

(8.15) から (8.16) を示そう．いま

$$v_\nu=\frac{s_\nu}{\nu+1},\quad V_\nu=v_0+v_1+\cdots+v_\nu$$

とおくと，(8.15) は $V_n\cong s\log n$ と同値である．ゆえに

$$v_n=o(\log n),\quad s_n=o(n\log n)$$

である．他方

$$\log\frac{\nu+2}{\nu+1}=\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{2(\nu+1)^2}+O\left(\frac{1}{\nu^3}\right)$$

であるから，

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}s_\nu\log\frac{\nu+2}{\nu+1}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{s_\nu}{\nu+1}-\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{s_\nu}{(\nu+1)^2}+\sum_{\nu=0}^{n-1}s_\nu O\left(\frac{1}{\nu^3}\right)$$
$$=P_n-\frac{1}{2}Q_n+R_n$$

とおく．

$$Q_n=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{v_\nu}{\nu+1}=\sum_{\nu=0}^{n-2}\frac{V_\nu}{(\nu+1)(\nu+2)}+\frac{V_{n-1}}{n}$$

で，$V_n=O(\log n)$ なるゆえ $Q_n=O(1)$ である．また $R_n=O(1)$ である．よって (8.15) から (8.16) が導かれる．

(8.16) から (8.15) の証明も上と同様である．　(証明終)

次に (R, λ_n, k)-総和法をディリクレ級数

(8.17) $$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n s}\qquad (s=\sigma+i\tau)^{10)}$$

に適用しよう．まず次の定理を証明しよう．

定理 8.12.　もし $f(t)$ が $[0,\infty)$ で積分可能な関数で，かつ $f(t)=o(t^k)$ $(k\geqq 0)$ ならば，

$$\int_0^\omega s^{k+1}e^{-st}f(t)\,dt$$

は $\omega\to\infty$ のとき，$|\arg s|\leqq\alpha<\frac{1}{2}\pi$ で与えられる s-平面上の角集合 $\boldsymbol{\alpha}$

---

10)　$\lambda_1>0$ と仮定する．

において一様収束する．

証明． 任意の $\varepsilon>0$ に対して ξ を十分大きくとり

$$|f(t)|<\varepsilon t^k \qquad (t\geqq\xi)$$

であるようにする．$\omega_2>\omega_1\geqq\xi$ なる任意の ω_1，ω_2 に対して

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} s^{k+1}e^{-st}f(t)\,dt\right|<\varepsilon\int_0^\infty |s|^{k+1}e^{-\sigma t}t^k\,dt$$

$$=\varepsilon\Gamma(k+1)\left(\frac{|s|}{\sigma}\right)^{k+1}\leqq\varepsilon\Gamma(k+1)(\sec\alpha)^{k+1}$$

である．ここで ξ は $\boldsymbol{\alpha}$ 内の s の値に無関係である． (証明終)

定理 7.9 に対応して次の定理が証明される．

定理 8.13． もし級数 (8.17) が $s=s_0$ に対して (R, λ_n, k)-総和可能ならば，それは $|\arg(s-s_0)|\leqq\alpha<\frac{1}{2}\pi$ で与えられる s-平面上の角集合において一様に (R, λ_n, k)-総和可能である．さらに A を $s=s_0$ における (8.17) のリース和とし，$A^{(k)}(t)=\sum_{\lambda_\nu<t}(t-\lambda_\nu)^k a_\nu$，$A^{(0)}(t)=A(t)$ とおくと，s_0 を除く角集合の点で (8.17) はリース和

$$\frac{1}{\Gamma(k+1)}\int_0^\infty s^{k+1}e^{-st}A^{(k)}(t)\,dt$$

をもち，s_0 をいれた角集合の点ではリース和

$$A+\frac{1}{\Gamma(k+1)}\int_0^\infty s^{k+1}e^{-st}\{A^{(k)}(t)-At^k\}\,dt \tag{8.18}$$

をもつ．

証明． $s_0=0$ として一般性を失わない． 対応する角集合を $\boldsymbol{\alpha}$ で表す．$u_n=a_ne^{-\lambda_n s}$ $(n=1, 2, \cdots)$ とし，λ_p を ω より小さい最大の λ とすると，アーベルの変換により

$$\begin{aligned} U^{(k)}(\omega)&=\sum_{\lambda_\nu<\omega}(\omega-\lambda_\nu)^k u_\nu \\ &=\sum_{\nu=1}^{p-1}A_\nu\Delta\{e^{-\lambda_\nu s}(\omega-\lambda_\nu)^k\}+A_pe^{-\lambda_p s}(\omega-\lambda_p)^k \\ &=-\int_0^\omega A(t)\frac{d}{dt}\{e^{-st}(\omega-t)^k\}\,dt \end{aligned} \tag{8.19}$$

である．ここで $A_\nu=a_1+a_2+\cdots+a_\nu$ とする．

(i) k が整数のときには，まず

$$A=0, \quad A^{(k)}(\omega)=o(\omega^k)$$

と仮定する．(8.19) を k 回部分積分すると，積分記号を含まない項は $e^{-s\omega}A^{(k)}(\omega)$ だけが残り，これは $\omega\to\infty$ のとき $\boldsymbol{a}$ において一様に $o(\omega^k)$ である．また積分記号を含む項は，ω^k で割ると

$$(8.20)\qquad \frac{(-1)^{k+1}\omega^{-k}}{k!}\int_0^\omega A^{(k)}(t)\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\{e^{-st}(\omega-t)^k\}dt$$

である．ここで

$$(8.21)\qquad \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\{e^{-st}(\omega-t)^k\}=(-1)^{k+1}e^{-st}s^{k+1}\omega^k+e^{-st}\sum H_{ijl}s^i\omega^jt^l$$

とおくことができる．H_{ijl} は定数で

$$i=j+l+1, \quad j\leqq k-1$$

である．

(8.21) を (8.20) に代入すると，右辺第1項に由来する積分は

$$\frac{1}{k!}\int_0^\omega s^{k+1}e^{-st}A^{(k)}(t)dt$$

となる．$A^{(k)}(t)=o(t^k)$ なるゆえ，前定理より $\omega\to\infty$ のとき $\boldsymbol{a}$ において一様に有限の値

$$\frac{1}{k!}\int_0^\infty s^{k+1}e^{-st}A^{(k)}(t)dt$$

に近づく．これは (8.18) において $A=0$ としたものである．ゆえに積分 (8.20) において，(8.21) の右辺第2項に由来する項が $\omega\to\infty$ のとき $\boldsymbol{a}$ において一様に 0 に近づくことがいえればよい．

$$J=\omega^{-k+j}\int_0^\omega s^it^le^{-st}A^{(k)}(t)dt=\omega^{-k+j}\int_0^\nu \quad +\omega^{-k+j}\int_\nu^\omega \quad =J_1+J_2$$

とおき，任意の $\varepsilon>0$ に対して ν を十分大きくとり $|A^{(k)}(t)|<\varepsilon t^k$ $(t\geqq\nu)$ となるようにする．さらに $|A^{(k)}(t)|<Mt^k$ $(t>0)$ であるような M がある．

いま，

$$F(x)=x^{-k+j}\int_0^x e^{-t}t^{k+l}dt \qquad (x>0)$$

とおくと，$j+l+1=i>0$ なるゆえ $\lim_{x\to 0}F(x)=0$ で，かつ $-k+j\leqq -1$ で

$\int_0^\infty e^{-t}t^{k+l}dt=(k+l)!$ なるゆえ $\lim_{x\to\infty}F(x)=0$ である．ゆえに $F(x)$ は $x>0$ において最大値 μ をとる．

$$|J_1|<M\omega^{-k+j}|s|^i\int_0^\nu e^{-\sigma t}t^{k+l}dt$$
$$=M\omega^{-k+j}\left(\frac{|s|}{\sigma}\right)^i\nu^{k-j}F(\nu\sigma)$$
$$\leqq M\mu(\sec\alpha)^i\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{k-j}$$

かつ

$$|J_2|<\varepsilon\omega^{-k+j}|s|^i\int_0^\omega e^{-\sigma t}t^{k+l}dt$$
$$=\varepsilon\omega^{-k+j}\left(\frac{|s|}{\sigma}\right)^i\sigma^{i-k-l-1}\int_0^{\sigma\omega}e^{-y}y^{k+l}dy$$
$$=\varepsilon\left(\frac{|s|}{\sigma}\right)^iF(\sigma\omega)\leqq\varepsilon\mu(\sec\alpha)^i$$

なるゆえ，まず ν をとり，次に ω を十分大きくとると，J_1+J_2 は任意に小さくできる．ゆえに k が整数で $A=0$ のときは定理は証明された．

次に $A\neq0$ とすると，級数

$$(-A+a_1e^{-\lambda_1 s})+a_2e^{-\lambda_2 s}+a_3e^{-\lambda_3 s}+\cdots$$

は上に証明したことから，$\boldsymbol{\alpha}$ において一様に $(R,\ \lambda_n,\ k)$-総和可能で，和

$$\frac{1}{k!}\int_0^\infty s^{k+1}e^{-st}\{A^{(k)}(t)-At^k\}dt$$

をもつ．また級数 $A+0+0+\cdots$ は収束するから，$\boldsymbol{\alpha}$ において一様に $(R,\ \lambda_n,\ k)$-総和可能である．その和 A は $s=0$ のときを除いて

$$\frac{A}{k!}\int_0^\infty s^{k+1}e^{-st}t^kdt$$

である．

(ii) $0<k<1$ のときには，(i) と同様に $A=0$ と仮定する．(8.19) より

$$\frac{U^{(k)}(\omega)}{\omega^k}=-\frac{1}{\omega^k}\int_0^\omega A(t)\frac{d}{dt}\{e^{-st}(\omega-t)^k\}dt$$
$$=k\omega^{-k}e^{-s\omega}\int_0^\omega A(t)(\omega-t)^{k-1}dt$$

$$-\omega^{-k}\int_0^\omega A(t)\frac{d}{dt}\{(e^{-st}-e^{-s\omega})(\omega-t)^k\}dt$$

である．この最後の式の第1項は $\boldsymbol{a}$ において一様に

$$\omega^{-k}e^{-s\omega}A^{(k)}(\omega)=o(1)$$

である．第2項に部分積分を行い

$$\omega^{-k}\int_0^\omega A^{(1)}(t)\frac{d^2}{dt^2}\{(e^{-st}-e^{-s\omega})(\omega-t)^k\}dt=J_1+J_2+J_3$$

とおく．ここで

$$J_1=\omega^{-k}\int_0^\omega A^{(1)}(t)s^2e^{-st}(\omega-t)^k dt,$$

$$J_2=\omega^{-k}\int_0^\omega A^{(1)}(t)2kse^{-st}(\omega-t)^{k-1}dt,$$

$$J_3=\omega^{-k}\int_0^\omega A^{(1)}(t)k(k-1)(e^{-st}-e^{-s\omega})(\omega-t)^{k-2}dt$$

とする．

まず J_1 をしらべる．$(R,\lambda_n,1)$-$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$ なるゆえ $A^{(1)}(t)=o(t)$ である．ゆえに前定理より，積分

$$\int_0^\omega s^2e^{-st}A^{(1)}(t)dt$$

は $\omega\to\infty$ のとき，$\boldsymbol{a}$ において一様に収束する．ゆえに定理 8.5 の証明と同様にして，J_1 も $\omega\to\infty$ のとき $\boldsymbol{a}$ において一様収束する．その極限値は，定理 8.3 を使い

$$\int_0^\infty s^2e^{-st}A^{(1)}(t)dt=\frac{s^2}{\Gamma(1+k)\Gamma(1-k)}\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t A^{(k)}(u)\frac{du}{(t-u)^k}$$

$$=\frac{s^2}{\Gamma(1+k)\Gamma(1-k)}\int_0^\infty A^{(k)}(u)du\int_u^\infty e^{-st}\frac{dt}{(t-u)^k}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+k)}\int_0^\infty s^{k+1}e^{-su}A^{(k)}(u)du$$

である．ここで二重積分の順序交換は，積分が絶対収束することから明らかである．

次に J_2, J_3 が一様に0に近づくことを示そう．

$$J_2=2k\omega^{-k}\int_0^\omega se^{-st}(\omega-t)^{k-1}A^{(1)}(t)dt=2k\omega^{-k}\left(\int_0^\nu+\int_\nu^\omega\right)=J_2'+J_2''$$

とおく．任意に $\varepsilon>0$ を与えるとき，ν を $|A^{(1)}(t)|<\varepsilon t$ $(t\geqq\nu)$ であるようにえらぶ．また ω は $\omega-\nu>1$ であるようにする．他方 $|A^{(1)}(t)|<Mt$ $(t>0)$ であるような定数 M が存在する．さらに $te^{-t}<1$ $(t\geqq0)$ で，また α におけるすべての s に対して $|s|/\sigma\leqq\sec\alpha$ である．いま $K=2k\sec\alpha$ とおくと

$$|J_2'|<KM\omega^{-k}\int_0^\nu \sigma te^{-\sigma t}(\omega-t)^{k-1}dt<KM\nu\omega^{-k}$$

である．同様に

$$|J_2''|<K\varepsilon\omega^{-k}\int_\nu^\omega \sigma te^{-\sigma t}(\omega-t)^{k-1}dt<\frac{K\varepsilon}{k}$$

である．したがって ν と ω を十分大きくとると J_2 を任意に小さくすることができる．

J_3 については，定理 7.9 の証明と同様にして

$$|e^{-st}-e^{-s\omega}|\leqq(e^{-\sigma t}-e^{-\sigma\omega})\sec\alpha<(\omega-t)\sigma e^{-\sigma t}\sec\alpha$$

である．以下 J_2 のときと同様にして $J_3=o(1)$ が示される．

(iii) $k>1$ で，かつ整数でないときには，定理 8.6 の証明と同様に (i) と (ii) を組み合わせる． (証明終)

§9. スティルチェス積分とモーメント数列

次節で述べるハウスドルフ総和法のために，スティルチェス積分とモーメント数列について述べよう．前者については多くの本で述べられているので，一部の定理はその証明を省く．本節および次節で使用される関数はすべて実変数 x の実数値関数とする．ここで得られる諸結果は直ちに実変数 x の複素数値関数に一般化される．

I. $f(x)$, $\phi(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で定義された関数とする．$[a, b]$ の分割

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

に対して，$\delta(\Delta)=\max_{i=0,1,\cdots,n-1}(x_{i+1}-x_i)$ とおきこの分割の**ノルム**という．

$$x_i\leqq\xi_i\leqq x_{i+1}\qquad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

なる ξ_i を任意にとり

$$\sigma_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\{\phi(x_{i+1})-\phi(x_i)\}$$

とおくとき，もし $\lim_{\delta(\Delta)\to 0}\sigma_\Delta$ が Δ のえらび方と ξ_i のえらび方に無関係に極限値 I に収束するならば，

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x)=I \tag{9.1}$$

と書き，I を $\psi(x)$ に関する $f(x)$ の**リーマン・スティルチェス積分**または単に**スティルチェス積分**という．この定義から明らかなように，もし $\psi(x)$ が $[a, b]$ で定数ならば

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x)=0$$

である．

いま

$$M_i=\sup_{x_i\leqq x\leqq x_{i+1}} f(x),\qquad m_i=\inf_{x_i\leqq x\leqq x_{i+1}} f(x),$$

$$S_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\{\psi(x_{i+1})-\psi(x_i)\},\qquad s_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\{\psi(x_{i+1})-\psi(x_i)\}$$

とおくと，次の定理が成り立つ．

定理 9.1.　$f(x)$，$\psi(x)$ は $a\leqq x\leqq b$ における有界な関数とし，$\psi(x)$ はさらに単調増加関数とする．積分 (9.1) が存在するための必要十分条件は，分割 Δ のえらび方に無関係に

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0}(S_\Delta-s_\Delta)=0 \tag{9.2}$$

なることである．

証明.　必要条件．もし積分

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x)=I$$

が存在するとする．任意の $\varepsilon>0$ と任意の分割 Δ に対して

$$0\leqq M_i-f(\xi_i)<\varepsilon\qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

であるような ξ_i $(x_i\leqq\xi_i\leqq x_{i+1})$ をとることができ，

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\{\psi(x_{i+1})-\psi(x_i)\}$$

$$\leqq S_\Delta\leqq\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\{\psi(x_{i+1})-\psi(x_i)\}+\varepsilon\{\psi(b)-\psi(a)\},$$

さらに

$$I \leqq \varliminf_{\delta(\varDelta)\to 0} S_\varDelta \leqq \varlimsup_{\delta(\varDelta)\to 0} S_\varDelta \leqq I+\varepsilon\{\psi(b)-\psi(a)\},$$

ゆえに

$$\lim_{\delta(\varDelta)\to 0} S_\varDelta = I$$

が成り立つ．同様にして $\lim_{\delta(\varDelta)\to 0} s_\varDelta = I$ である．

十分条件． もし (9.2) が成り立つならば，$s_\varDelta \leqq \sigma_\varDelta \leqq S_\varDelta$ なるゆえ，$\lim_{\varDelta(\delta)\to 0} S_\varDelta$ が収束することを示せばよい．(9.2) より任意の $\varepsilon>0$ に対して，適当な $\delta_0>0$ をえらぶと，$\delta(\varDelta)<\delta_0$ なる任意の分割 $\varDelta$ に対して

$$S_\varDelta - s_\varDelta < \frac{\varepsilon}{2}$$

とできる．いま $\delta(\varDelta_1)<\delta_0$，$\delta(\varDelta_2)<\delta_0$ なる任意の分割 $\varDelta_1$，$\varDelta_2$ に対して，$\varDelta_1$ と $\varDelta_2$ のあらゆる分点からなる分割を $\varDelta_3$ とする．

$$s_{\varDelta_1} \leqq S_{\varDelta_3} \leqq S_{\varDelta_1}, \qquad s_{\varDelta_2} \leqq S_{\varDelta_3} \leqq S_{\varDelta_2}$$

なるゆえ，

$$0 \leqq S_{\varDelta_1} - S_{\varDelta_3} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad 0 \leqq S_{\varDelta_2} - S_{\varDelta_3} < \frac{\varepsilon}{2}$$

である．よって

$$|S_{\varDelta_1} - S_{\varDelta_2}| < \varepsilon$$

である． (証明終)

$[a, b]$ で定義された関数 $\psi(x)$ が**有界変動**であるとは，

$$v(\varDelta) = \sum_{i=0}^{n-1} |\psi(x_{i+1}) - \psi(x_i)|$$

が $\varDelta$ のとり方に無関係なある定数をこえないときをいう．すべての分割 $\varDelta$ についての $v(\varDelta)$ の上限を，$\psi(x)$ の $[a, b]$ における**全変動量**といい，$V_\psi(b)$ または $V[\psi]_a^b$ と書く．また $a \leqq t \leqq b$ なる t を任意にとるとき，同様にして $V_\psi(t)$ または $V[\psi]_a^t$ を考えることができる．

定理 9.2. もし $\psi(x)$ が $[a, b]$ で有界変動な関数であるならば，$[a, b]$ で正である，単調増加で有界な，かつ $x=a$ で 0 となる二つの関数 $\eta(x)$，$\zeta(x)$ があって，$a \leqq x \leqq b$ なる任意の x に対して

$$\psi(x) = \eta(x) - \zeta(x) + \psi(a),$$
$$V_\psi(x) = \eta(x) + \zeta(x)$$

となる．　(証明略)

定理 9.3.　もし $[a, b]$ で，$f(x)$ は連続，$\phi(x)$ は有界変動ならば，積分

$$\int_a^b f(x)\,d\phi(x)$$

は存在する．

証明.　定理 9.1，定理 9.2 と $f(x)$ の一様連続性から明らかである．

定理 9.4.　もし $[a, b]$ で，$f(x)$ は有界変動，$\phi(x)$ は連続であるならば，積分 $\int_a^b f(x)\,d\phi(x)$ は存在して，かつ

$$\int_a^b f(x)\,d\phi(x) = f(b)\phi(b) - f(a)\phi(a) - \int_a^b \phi(x)\,df(x)$$

である．

証明.　$[a, b]$ の分割 Δ に対して，アーベルの変換により

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\{\phi(x_{i+1})-\phi(x_i)\}\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\phi(x_i)\{f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})\}-\phi(a)\{f(\xi_0)-f(a)\}\\ &\quad -\phi(b)\{f(b)-f(\xi_{n-1})\}+f(b)\phi(b)-f(a)\phi(a)\end{aligned}$$

である．ここで $x_i \leqq \xi_i \leqq x_{i+1}$ とする．$\delta(\Delta)\to 0$ とすると

$$\max(\xi_0-a,\ \xi_1-\xi_0,\ \cdots,\ \xi_{n-1}-\xi_{n-2},\ b-\xi_{n-1}) \to 0$$

であるから，前定理より上式の右辺は

$$-\int_a^b \phi(x)\,df(x) + f(b)\phi(b) - f(a)\phi(a)$$

に近づく．　(証明終)

定理 9.5.　もし $[a, b]$ で，$f_1(x)$，$f_2(x)$ は連続，$\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$ は有界変動で，さらに k_1，k_2，l_1，l_2 を任意の定数とすると，

$$\begin{aligned}&\int_a^b \{k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)\}\,d\{l_1\phi_1(x)+l_2\phi_2(x)\}\\ &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} k_i l_j \int_a^b f_i(x)\,d\phi_j(x)\end{aligned}$$

である．　(証明略)

定理 9.6.　$[a, b]$ で，$f(x)$ は連続，$\phi(x)$ は有界変動な関数とする．$a<c<b$ なる任意の c に対して

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x)=\int_a^c f(x)\,d\psi(x)+\int_c^b f(x)\,d\psi(x),$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\psi(x)\right|\leqq\int_a^b |f(x)|\,dV_\psi(x)\leqq\max_{a\leqq x\leqq b}|f(x)|\,V_\psi(b)$$

である．ここで $\int_a^b |f(x)|\,dV_\psi(x)$ は $\int_a^b |f(x)|\,|d\psi(x)|$ とも書かれる．

(証明略)

$\psi(x)$ は $[a, b]$ で有界変動な関数とする．もし $\psi(x)$ が

$$\psi(a)=0,$$

$$\psi(x)=\frac{\psi(x+0)+\psi(x-0)}{2},\quad ただし\quad a<x<b$$

をみたすならば，$\psi(x)$ は**正規化**されているという．これに関して次の定理が成り立つ．

定理 9.7. もし $[a, b]$ で，$f(x)$ は連続，$\psi(x)$ は有界変動ならば，$[a, b]$ で有界変動で正規化された関数 $\psi^*(x)$ をつくり

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x)=\int_a^b f(x)\,d\psi^*(x)$$

とできる．

証明. いま

$$\psi^*(a)=0,$$

$$\psi^*(x)=\frac{\psi(x+0)+\psi(x-0)}{2}-\psi(a),\quad ただし\quad a<x<b,$$

$$\psi^*(b)=\psi(b)-\psi(a)$$

とおくと，$\psi^*(x)$ は $[a, b]$ で有界変動で正規化されている．

$$\varphi(x)=\psi(x)-\psi(a)-\psi^*(x)\qquad(a\leqq x\leqq b)$$

とおくと，$\varphi(x)$ は $[a, b]$ で有界変動で $\varphi(a)=\varphi(b)=0$．さらに $\varphi(x)$ は $\psi(x)$ の連続点では 0 である．ゆえに $\varphi(x)=0$ なる x の全体を E とすれば，集合 E は $[a, b]$ の中に稠密にあって，かつ両端 a, b を含む．よってスティルチェス積分の定義で分点 x_i がつねに E に属するようにすれば，定理 9.3 により

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)=0$$

である．定理 9.5 により証明は終る．

定理 9.8.　もし $\psi(x)$ が $[0, 1]$ で有界変動で，正規化されていて，かつ

$$\int_0^1 x^n d\psi(x)=0 \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるならば，$0\leqq x\leqq 1$ なるすべての x に対して $\psi(x)=0$ である．

証明.　仮定より $\psi(0)=\psi(1)=0$. ゆえに部分積分により

$$\int_0^1 x^n \psi(x)dx=0 \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．もし

(9.3)
$$\varphi(x)=\int_0^x \psi(t)dt \qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

とおくと，上式より $\varphi(1)=0$ となり，部分積分により

(9.4)
$$\int_0^1 x^n \varphi(x)dx=0 \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

となる．

$\varphi(x)$ は連続関数なるゆえ，ワイヤシュトラスの近似定理により，任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$|\varphi(x)-P(x)|<\varepsilon \qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

であるような多項式 $P(x)$ が存在する．(9.4) より

$$\int_0^1 \{\varphi(x)\}^2 dx=\int_0^1 \varphi(x)P(x)dx+\int_0^1 \varphi(x)\{\varphi(x)-P(x)\}dx$$
$$=\int_0^1 \varphi(x)\{\varphi(x)-P(x)\}dx<\varepsilon\int_0^1 |\varphi(x)|dx$$

が得られる．ε は任意なるゆえ，$\varphi(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ において恒等的に 0 である．(9.3) により $\psi(x)$ は，そのすべての連続点で 0 である．ところがこのような点は $[0, 1]$ の中に稠密にあって，かつ $0<x<1$ なるすべての x に対して $\psi(x+0)$ と $\psi(x-0)$ は存在するから

$$\psi(x+0)=\psi(x-0)=\psi(x)=0 \qquad (0<x<1)$$

である．ゆえに $\psi(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ において恒等的に 0 である．(証明終)

系.　もし $\psi_1(x), \psi_2(x)$ が $[0, 1]$ で有界変動で，正規化されていて，かつ

$$\mu_n=\int_0^1 x^n d\psi_1(x)=\int_0^1 x^n d\psi_2(x) \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

ならば，$0 \leqq x \leqq 1$ なるすべての x に対して $\psi_1(x)=\psi_2(x)$ である．

(証明略)

II. 有界変動な関数の列に関する定理を述べよう．

定理 9.9. もし二重数列 a_{mn} $(m,\ n=0,\ 1,\ \cdots)$ が

$$|a_{mn}| \leqq H \qquad (m,\ n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるならば，正の整数列 $n_0<n_1<\cdots$ と数列 $a_0,\ a_1,\ \cdots$ を適当にえらぶと，

$$\lim_{i\to\infty} a_{m,n_i}=a_m \qquad (m=0,\ 1,\ \cdots)$$

となる．ここで H は定数とする．

証明． 数列 $\{a_{0n}\}_{n=0,1,\cdots}$ は有界であるから，$n_0^0<n_1^0<\cdots$ と a_0 を適当にえらび

$$\lim_{i\to\infty} a_{0n_i^0}=a_0$$

とすることができる．次に数列 $\{a_{1n_i^0}\}_{i=0,1,\cdots}$ も有界であるから，$\{n_i^0\}_{i=0,1,\cdots}$ の部分列 $\{n_i^1\}_{i=0,1,\cdots}$ と a_1 を適当にえらび

$$\lim_{i\to\infty} a_{1n_i^1}=a_1$$

とすることができる．このようにして任意の $m=1,\ 2,\ \cdots$ に対し，$\{n_i^{m-1}\}_{i=0,1,\cdots}$ の部分列 $\{n_i^m\}_{i=0,1,\cdots}$ と a_m を適当にえらび

$$\lim_{i\to\infty} a_{mn_i^m}=a_m$$

とすることができる．いま $n_i=n_i^i$ $(i=0,\ 1,\ \cdots)$ とおくと

$$\lim_{i\to\infty} a_{mn_i}=a_m \qquad (m=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．

(証明終)

定理 9.10. $\psi_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ の各々は，$[a,\ b]$ で定義された単調増加関数とする．もし

$$|\psi_n(x)| \leqq H \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots;\ a \leqq x \leqq b)$$

なる定数 H が存在するならば，正の整数列 $n_0<n_1<\cdots$ と単調増加で有界な関数 $\psi(x)$ を適当にえらぶと

$$\lim_{i\to\infty} \psi_{n_i}(x)=\psi(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

となる．

証明． $[a,\ b]$ におけるすべての有理数を数列 $\{x_m\}$ とならべ，

$$a_{mn}=\varphi_n(x_m) \qquad (m,\ n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおく．前定理より正の整数列 $n_0^*<n_1^*<\cdots$ と，すべての x_m ($m=0, 1, \cdots$) で定義された関数 $\varphi(x)$ を適当にえらぶと

$$\lim_{i\to\infty}\varphi_{n_i^*}(x_m)=\varphi(x_m) \qquad (m=0,\ 1,\ \cdots)$$

となる．いま

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\varphi_{n_i^*}(x)=\bar{\varphi}(x) \qquad (a\leqq x\leqq b),$$

$$\underline{\lim_{i\to\infty}}\varphi_{n_i^*}(x)=\underline{\varphi}(x) \qquad (a\leqq x\leqq b)$$

とおくと，

$$\varphi(x_m)=\bar{\varphi}(x_m)=\underline{\varphi}(x_m) \qquad (m=0,\ 1,\ \cdots)$$

で，かつ $\bar{\varphi}(x)$ と $\underline{\varphi}(x)$ はともに $[a, b]$ で単調増加な関数である．ゆえに $\bar{\varphi}(x)$ と $\underline{\varphi}(x)$ の共通の連続点は $[a, b]$ の中に稠密にある． y をそのような一点とし，$\{x_{m_i}\}$ を

$$\lim_{i\to\infty}x_{m_i}=y$$

であるような有理数列とすると，

$$\bar{\varphi}(x_{m_i})=\underline{\varphi}(x_{m_i}) \qquad (i=0,\ 1,\ \cdots)$$

なるゆえ

$$\bar{\varphi}(y)=\lim_{i\to\infty}\bar{\varphi}(x_{m_i})=\lim_{i\to\infty}\underline{\varphi}(x_{m_i})=\underline{\varphi}(y)$$

である．このような y に対しては

$$\varphi(y)=\bar{\varphi}(y)=\underline{\varphi}(y)$$

により $\varphi(y)$ を定義する．

$\bar{\varphi}(x)$ と $\underline{\varphi}(x)$ の不連続点の全体は高々可附番集合であるから，$\{z_m\}_{m=0,1,\cdots}$ とならべることにする．いま

$$b_{mn_i^*}=\varphi_{n_i^*}(z_m) \qquad (m,\ i=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと，前定理より $\{n_i^*\}$ の部分列 $\{n_i\}$ と数列 $\{b_m\}$ を適当にえらぶと

$$\lim_{i\to\infty}b_{mn_i}=\lim_{i\to\infty}\varphi_{n_i}(z_m)=b_m \quad (m=0,\ 1,\ \cdots)$$

となる．このような z_m に対しては

$$\varphi(z_m)=b_m$$

により $\varphi(z_m)$ を定義すると，

$$\lim_{i\to\infty}\psi_{n_i}(x)=\psi(x) \qquad (a\leqq x\leqq b)$$

となる．$\psi(x)$ が単調増加で有界であることは明らかである．　(証明終)

定理 9.11.（ヘリーの定理） 関数列 $\{\psi_n(x)\}$ は $[a, b]$ で一様有界変動とする（すなわち $V[\psi_n]_a^b\leqq M$ $(n=0, 1, \cdots)$）．さらに

$$|\psi_n(a)|\leqq H \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

であるならば，正の整数列 $n_0<n_1<\cdots$ と，$[a, b]$ で有界変動な関数 $\psi(x)$ を適当にえらぶと

$$\lim_{i\to\infty}\psi_{n_i}(x)=\psi(x) \qquad (a\leqq x\leqq b)$$

となる．ここで M, H はともに定数とする．

証明． 定理 9.2 より

$$\psi_n(x)=\eta_n(x)-\zeta_n(x)+\psi_n(a) \qquad (n=0, 1, \cdots),$$

$$V[\psi_n]_a^x=\eta_n(x)+\zeta_n(x) \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

と書ける．ここで $\eta_n(x)$, $\zeta_n(x)$ $(n=0, 1, \cdots)$ は，$[a, b]$ で正で単調増加で有界な関数で，さらに $\eta_n(a)=\zeta_n(a)=0$ である．

$\{\eta_n(x)\}$ と $\{\zeta_n(x)\}$ はともに前定理の条件をみたし，さらに数列 $\{\psi_n(a)\}$ は有界であるから，前定理より正の整数列 $n_0<n_1<\cdots$ と単調増加で有界な関数 $\eta(x)$, $\zeta(x)$ と実数 α を適当にえらぶと，

$$\lim_{i\to\infty}\eta_{n_i}(x)=\eta(x), \qquad \lim_{i\to\infty}\zeta_{n_i}(x)=\zeta(x) \qquad (a\leqq x\leqq b),$$

かつ

$$\lim_{i\to\infty}\psi_{n_i}(a)=\alpha$$

とできる．いま $\psi(a)=\alpha$, $\psi(x)=\eta(x)-\zeta(x)+\psi(a)$ とおくと，この $\{n_i\}$ とこの $\psi(x)$ は求めるものである．　(証明終)

定理 9.12.（ヘリー・ブレイの定理） 関数列 $\{\psi_n(x)\}$ は $[a, b]$ で一様有界変動とし

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=\psi(x) \qquad (a\leqq x\leqq b)$$

であるならば，任意の連続関数 $f(x)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)d\psi_n(x)=\int_a^b f(x)d\psi(x)$$

である．

証明. 仮定より $\psi(x)$ も $[a, b]$ で有界変動である.

$$0 \leqq V[\psi_n]_a^b \leqq M \quad (n=0,\ 1,\ \cdots), \qquad 0 \leqq V[\psi]_a^b \leqq M$$

とする. 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $[a, b]$ の分割

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$$

のノルムを十分小さくして, 任意に2点 $x,\ x' \in [x_i,\ x_{i+1}]$ $(i=0,\ 1,\ \cdots)$ をとるとき $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ であるようにする. いま

$$\begin{aligned} D_n &= \int_a^b f(x)\,d\psi_n(x) - \int_a^b f(x)\,d\psi(x) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{f(x)-f(x_i)\}\,d\psi_n(x) - \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{f(x)-f(x_i)\}\,d\psi(x) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} d\{\psi_n(x)-\psi(x)\} \end{aligned}$$

とおくと,

$$|D_n| \leqq 2\varepsilon M + \max_{a \leqq x \leqq b} |f(x)| \sum_{i=0}^{m-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} d\{\psi_n(x)-\psi(x)\} \right|$$

である (定理 9.5, 9.6 参照). ゆえに

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |D_n| \leqq 2\varepsilon M$$

である.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

III. $\psi(x)$ は $[0, 1]$ で定義された有界変動な関数とするとき,

$$\mu_n = \int_0^1 x^n\,d\psi(x) \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots) \tag{9.5}$$

を $\psi(x)$ の n 位の**モーメント定数**といい, 数列 $\{\mu_n\}$ を**モーメント数列**という. また数列 $\{\mu_n\}$ が与えられたとき, それがどのような条件を満足すればモーメント数列となるかという問題を**モーメント問題**[1] という.

もし数列 $\{\mu_n\}$ がモーメント数列であるならば,

$$|\mu_n| \leqq \int_0^1 |d\psi(x)| = V[\psi]_0^1 \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるから, それは有界数列となる. 数列 $\{\mu_n\}$ がモーメント数列であるための必要十分条件は, ハウスドルフによってはじめて与えられた.

定理 9.8 系でわかったように, もし $\psi(x)$ が正規化されているならば,

1) 無限区間 $[0, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ についても同様な問題を考えることができる. このように区間 $[0, 1]$ に対するものを**ハウスドルフのモーメント問題**という.

モーメント数列の表示 (9.5) は唯一とおりである．本節では今後有界変動の関数 $\psi(x)$ は正規化されていると仮定しよう．

数列 $\{\mu_n\}$ が与えられたとき

$$\lambda_{km}=\binom{k}{m}\Delta^{k-m}\mu_m \qquad (k,\ m=0,\ 1,\ \cdots),$$

$$\lambda_{km}(x)=\binom{k}{m}x^m(1-x)^{k-m} \text{ [2]} \qquad (k,\ m=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおく．ここで $k<m$ のときはともに 0 とする．

関数 $f(x)$ は $[0, 1]$ で定義されているとき，

$$B_k(f(x),\ x)=B_k(f(x))=\sum_{m=0}^{k}f\left(\frac{m}{k}\right)\lambda_{km}(x) \quad (k=0,\ 1,\ \cdots)$$

を $f(x)$ の k 次の**ベルンシュタイン多項式**という．これは高々 k 次の x の多項式である．特に

$$B_k(1)=\sum_{m=0}^{k}\lambda_{km}(x)=1 \qquad (k=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．

定理 9.13.（**ハウスドルフの定理**） 実数列 $\{\mu_n\}$ がモーメント数列であるための必要十分条件は，

(9.6) $$\sum_{m=0}^{k}|\lambda_{km}|\leqq L \qquad (k=0,\ 1,\ \cdots)$$

なる定数 L が存在することである．

証明． 必要条件．もし $\psi(x)$ が $[0, 1]$ で有界変動な関数とし，

$$\mu_n=\int_0^1 x^n d\psi(x) \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるならば，

$$\Delta^{k-m}x^m=\sum_{\nu=0}^{k-m}(-1)^\nu\binom{k-m}{\nu}x^{m+\nu}$$

$$=x^m\sum_{\nu=0}^{k-m}\binom{k-m}{\nu}(-x)^\nu$$

---

2) $\mu_n=x^n$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ とおくと，$\lambda_{km}=\binom{k}{m}\Delta^{k-m}x^m=\lambda_{km}(x)$ である（定理 9.13 の証明参照）．

$$=x^m(1-x)^{k-m}$$

なるゆえ

$$\lambda_{km}=\binom{k}{m}\int_0^1 \Delta^{k-m}x^m d\psi(x)=\binom{k}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{k-m}d\psi(x)$$

である．よって

$$\sum_{m=0}^{k}\lambda_{km}=\int_0^1 d\psi(x),\qquad \sum_{m=0}^{k}|\lambda_{km}|\leqq\int_0^1|d\psi(x)|=V[\psi]_0^1$$
$$(k=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．

十分条件の証明をするために少々の準備をしよう．数列 $\{\mu_n\}$ が与えられているとき，多項式

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{n}a_m x^m$$

に対して，

$$M[P_n(x)]=\sum_{m=0}^{n}a_m\mu_m$$

を $\{\mu_m\}$ に関する $P_n(x)$ の**モーメント**という．たとえば

$$M[x^n]=\mu_n,\qquad M[\lambda_{km}(x)]=\lambda_{km}$$

である．もし

$$\mu_n=\int_0^1 x^n d\psi(x)\qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるならば，

$$M[P_n(x)]=\int_0^1 P_n(x)d\psi(x)$$

である．

補助定理 9.14.　もし実数列 $\{\mu_n\}$ が定理 9.13 の条件を満足するならば，

$$\mu_n=\lim_{k\to\infty}M[B_k(x^n)]\qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．

証明.　$n=0$ に対しては $M[B_k(1)]=M[1]=\mu_0$ より明らか．

$n\geqq1$ に対しては，$k>n$ なる任意の k をとると

$$x^n=x^n\{(1-x)+x\}^{k-n}=\sum_{m=0}^{k-n}\binom{k-n}{m}x^{m+n}(1-x)^{k-m-n}$$

$$=\sum_{m=n}^{k}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{k(k-1)\cdots(k-n+1)}\lambda_{km}(x)$$

なるゆえ，

$$\mu_n=M[x^n]=\sum_{m=n}^{k}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{k(k-1)\cdots(k-n+1)}\lambda_{km}$$

である．他方

$$M[B_k(x^n)]=M\left[\sum_{m=0}^{k}\left(\frac{m}{k}\right)^n\lambda_{km}(x)\right]=\sum_{m=0}^{k}\left(\frac{m}{k}\right)^n\lambda_{km}$$

なるゆえ，

$$\begin{aligned}&\mu_n-M[B_k(x^n)]\\&=\sum_{m=n}^{k}\left\{\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{k(k-1)\cdots(k-n+1)}-\left(\frac{m}{k}\right)^n\right\}\lambda_{km}-\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{m}{k}\right)^n\lambda_{km}\\&=\sum_{m=n}^{k}\left\{\frac{ky(ky-1)\cdots(ky-n+1)}{k(k-1)\cdots(k-n+1)}-y^n\right\}\lambda_{km}-\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{m}{k}\right)^n\lambda_{km}\end{aligned}$$

である．ここで $y=m/k$ とおく．

$$\lim_{k\to\infty}\frac{ky(ky-1)\cdots(ky-n+1)}{k(k-1)\cdots(k-n+1)}=y^n$$

は $0\leqq y\leqq 1$ において一様に収束するゆえ，任意の $\varepsilon>0$ に対して適当に k_0 をとり，任意の $k>k_0$ に対して

$$\left|\frac{ky(ky-1)\cdots(ky-n+1)}{k(k-1)\cdots(k-n+1)}-y^n\right|<\varepsilon\quad\left(y=\frac{m}{k};\ m=n,\ n+1,\ \cdots,\ k\right),$$

かつ

$$\left|\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{m}{k}\right)^n\lambda_{km}\right|\leqq\left(\frac{n}{k}\right)^nL<\varepsilon$$

であるようにできる．ゆえに

$$|\mu_n-M[B_k(x^n)]|<\varepsilon L+\varepsilon\qquad(k>k_0)$$

である．　　　　　　　　　　　　　　　　（補助定理 9.14 の証明終）

以上の準備の下で定理9.13の十分条件の証明をしよう．任意の$k=0,1,\cdots$に対して，正規化された階段関数 $\varphi_k(x)$ を次のようにつくる．

$$\varphi_k\left(\frac{m}{k}+0\right)-\varphi_k\left(\frac{m}{k}-0\right)=\lambda_{km}\qquad(m=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1),$$

$$\varphi_k(0)=0,\qquad\varphi_k(+0)=\lambda_{k0},$$

$$\psi_k(1-0)=\sum_{m=0}^{k-1}\lambda_{km},\qquad \psi_k(1)=\sum_{m=0}^{k}\lambda_{km}=\mu_0.$$

すると $V[\psi_k]_0^1=\sum_{m=0}^{k}|\lambda_{km}|\leqq L$ $(k=0,\ 1,\ \cdots)$ であって，かつ

$$M[B_k(x^n)]=\sum_{m=0}^{k}\left(\frac{m}{k}\right)^n\lambda_{km}=\int_0^1 x^n d\psi_k(x)$$

である．補助定理 9.14 により

$$\mu_n=\lim_{k\to\infty}\int_0^1 x^n d\psi_k(x)\qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．

関数列 $\{\psi_k(x)\}$ は定理 9.11 の条件をみたすから，その部分列 $\{\psi_{k_i}(x)\}$ と有界変動な関数 $\psi(x)$ を適当にえらぶと

$$\lim_{i\to\infty}\psi_{k_i}(x)=\psi(x)\qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

となる．したがって，定理 9.12 により

$$\mu_n=\lim_{i\to\infty}\int_0^1 x^n d\psi_{k_i}(x)=\int_0^1 x^n d\psi(x)\qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．

このようにして得られた関数 $\psi(x)$ がもし正規化されていないならば，これを正規化して $\psi^*(x)$ とおく．定理 9.7，定理 9.8 系より，この $\psi^*(x)$ は

$$\mu_n=\int_0^1 x^n d\psi^*(x)\qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

なる唯一つの関数である．　　　　　　　　　　（定理 9.13 の証明終）

IV.　後で述べるクアジハウスドルフ総和法の準備のために，モーメント数列の性質をもう少ししらべよう．数列 $\{\mu_n\}$ が**完全単調**であるとは，

$$\Delta^k\mu_n\geqq 0\qquad (k,\ n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であることをいう．これに関して次の定理が成り立つ．

定理 9.15.（**ハウスドルフの定理**）　実数列 $\{\mu_n\}$ がモーメント数列であるための必要十分条件は，それが二つの完全単調な数列 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ により

$$\mu_n=\alpha_n-\beta_n\qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

と表されることである．

証明．　必要条件．もし $\{\mu_n\}$ がモーメント数列であるならば，$[0,1]$ で定義されたある有界変動な関数 $\psi(x)$ により

$$\mu_n=\int_0^1 x^n d\psi(x) \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

と表される．定理 9.2 より，[0, 1] で単調増加な二つの関数 $\eta(x)$, $\zeta(x)$ により

$$\psi(x)=\eta(x)-\zeta(x)+\psi(0)$$

と表される．ゆえに

$$\mu_n=\int_0^1 x^n d\eta(x)-\int_0^1 x^n d\zeta(x)$$
$$=\alpha_n-\beta_n \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと，$\eta(x)$ は単調増加関数ゆえ，$k,\ n=0,\ 1,\ \cdots$ に対し，

$$\Delta^k\alpha_n=\int_0^1 x^n(1-x)^k d\eta(x)\geqq 0,$$

同様に

$$\Delta^k\beta_n\geqq 0$$

である．

十分条件．これを証明するには次の定理を証明すればよい．

定理 9.16. もし $\{\mu_n\}$ が完全単調であるならば，[0, 1] で単調増加，かつ有界な関数 $\psi(x)$ を適当にとると

$$\mu_n=\int_0^1 x^n d\psi(x) \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

と表される．

証明. $\{\mu_n\}$ は完全単調ゆえ，

$$\lambda_{km}=\binom{k}{m}\Delta^{k-m}\mu_m\geqq 0 \qquad (k,\ m=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．よって

$$\sum_{m=0}^{k}|\lambda_{km}|=\sum_{m=0}^{k}\lambda_{km}=\mu_0 \qquad (k=0,\ 1,\ \cdots)$$

となり，定理 9.13 より

$$\mu_n=\int_0^1 x^n d\psi(x) \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

なる [0, 1] で有界変動な関数 $\psi(x)$ が存在する．この $\psi(x)$ は定理 9.13 の証明の途中 (85-86 ページ) で定義した関数列 $\{\psi_k(x)\}$ の部分列の極限関

数として与えられる．ところが $\lambda_{km} \geqq 0$ であるから，各関数 $\psi_k(x)$ は [0, 1] で単調増加である．$\{\psi_k(x)\}$ はまた一様有界でもあるゆえ，$\psi(x)$ は [0, 1] で単調増加かつ有界な関数である．　(証明終)

さて定理 9.13 と定理 9.15 からわかったように，実数列 $\{\mu_n\}$ に関する次の三つの性質は同値である．

(i)　モーメント数列である．

(ii)　$$\sum_{m=0}^{k} |\lambda_{km}| \leqq L \qquad (k=0,\ 1,\ \cdots).$$

(iii)　$\{\mu_n\}$ は完全単調な二つの数列の差として表される．

次に述べるラマヌジャンの定理の証明との比較のために，(ii) と (iii) が同値であることを直接に証明しよう．

定理 9.17.　実数列 $\{\mu_n\}$ が

$$\sum_{m=0}^{k} |\lambda_{km}| \leqq L \qquad (k=0,\ 1,\ \cdots) \tag{9.6}$$

であるための必要十分条件は，それが二つの完全単調な数列 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ により

$$\mu_n = \alpha_n - \beta_n \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

と表されることである．

証明.　必要条件．簡単のために，$k,\ n=0,\ 1,\ \cdots$ に対して

$$\Delta^k \mu_n = \mu_{n,k}, \qquad E\mu_n = \mu_{n+1},$$
$$E_1\mu_{n,k} = \mu_{n+1,k}, \qquad E_2\mu_{n,k} = \mu_{n,k+1}$$

とおく．すると

$$\mu_{n,k} = \Delta^k \mu_n = (E+\Delta)\Delta^k\mu_n = \Delta^k\mu_{n+1} + \Delta^{k+1}\mu_n$$
$$= \mu_{n+1,k} + \mu_{n,k+1} = (E_1+E_2)\mu_{n,k},$$

$$|\mu_{n,k}| \leqq |\mu_{n+1,k}| + |\mu_{n,k+1}| = (E_1+E_2)|\mu_{n,k}| \tag{9.7}$$

となる．さらに

$$\mu_{n,k,m} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \mu_{n+r,k+m-r}, \qquad \mu^*_{n,k,m} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} |\mu_{n+r,k+m-r}|$$

とおくと，上の二つの式より

$$\mu_{n,k,m} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} E_1^r E_2^{m-r} \mu_{n,k} = (E_1+E_2)^m \mu_{n,k} = \mu_{n,k}, \tag{9.8}$$

$$(9.9)\qquad \mu^*_{n,k,m}=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}E_1^rE_2^{m-r}|\mu_{n,k}|=(E_1+E_2)^m|\mu_{n,k}|\geqq|\mu_{n,k}|$$

となる．他方 (9.6) より

$$\mu^*_{0,0,m}=M_m\leqq L$$

となる．さて，(9.9) と (9.7) より

$$\mu^*_{n,k,m}=(E_1+E_2)^m|\mu_{n,k}|\leqq(E_1+E_2)^{m+1}|\mu_{n,k}|=\mu^*_{n,k,m+1}$$

なるゆえ，数列 $\{\mu^*_{n,k,m}\}_{m=0,1,\cdots}$ は単調増加で，かつ (9.9)，(9.6) より

$$\begin{aligned}\mu^*_{n,k,m}&=(E_1+E_2)^m|\mu_{n,k}|=(E_1+E_2)^mE_1^nE_2^k|\mu_{0,0}|\\&\leqq\binom{n+k}{k}(E_1+E_2)^mE_1^nE_2^k|\mu_{0,0}|\\&\leqq(E_1+E_2)^m\sum_{r=0}^{n+k}\binom{n+k}{r}E_1^{n+k-r}E_2^r|\mu_{0,0}|\\&=(E_1+E_2)^m(E_1+E_2)^{n+k}|\mu_{0,0}|=(E_1+E_2)^{n+k+m}|\mu_{0,0}|\\&=\mu^*_{0,0,n+k+m}=M_{n+k+m}\leqq L\end{aligned}$$

である．ゆえに $\lim_{m\to\infty}\mu^*_{n,k,m}$ は収束する．その極限値を $\mu^*_{n,k}$ とおくと，(9.8) と (9.9) より

$$|\mu_{n,k}|=|\mu_{n,k,m}|\leqq\mu^*_{n,k,m}$$

なるゆえ，

$$|\mu_{n,k}|\leqq\mu^*_{n,k}$$

が得られる．特に $\mu^*_{n,0}=\mu^*_n$ とおくと，

$$|\mu_n|=|\mu_{n,0}|\leqq\mu^*_{n,0}=\mu^*_n$$

となる．さて，(9.9) より

$$\mu^*_{n,k,m+1}=(E_1+E_2)^{m+1}|\mu_{n,k}|=(E_1+E_2)\mu^*_{n,k,m}$$

なるゆえ

$$\mu^*_{n,k+1,m}=\mu^*_{n,k,m+1}-\mu^*_{n+1,k,m}$$

となり，この両辺を $m\to\infty$ とすると

$$\mu^*_{n,k+1}=\mu^*_{n,k}-\mu^*_{n+1,k}=\Delta\mu^*_{n,k}$$

となる．ゆえに

$$\mu^*_{n,k}=\Delta^k\mu^*_{n,0}=\Delta^k\mu^*_n,$$

さらに

$$|\Delta^k \mu_n| = |\mu_{n,k}| \leqq \mu^*_{n,k} = \Delta^k \mu^*_n$$

となる．いま，

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(\mu^*_n + \mu_n), \qquad \beta_n = \frac{1}{2}(\mu^*_n - \mu_n)$$

とおくと，

$$\mu_n = \alpha_n - \beta_n, \qquad \Delta^k \alpha_n \geqq 0, \qquad \Delta^k \beta_n \geqq 0$$

となる．

十分条件であることは明らか．　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

定理 9.13 に対応して次の定理を証明しよう．

定理 9.18.（ラマヌジャンの定理） 実数列 $\{\mu_n\}$ がモーメント数列であるための必要十分条件は，

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left| \binom{k}{m} \Delta^{k-m} \mu_{m+1} \right| \leqq L \qquad (m=0, 1, \cdots) \tag{9.10}$$

なる定数 L が存在することである．

証明． 必要条件．もし $\{\mu_n\}$ がモーメント数列であるならば，定理 9.15 より二つの完全単調な数列 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ により

$$\mu_n = \alpha_n - \beta_n \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

と表される．ゆえに

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{\infty} \left| \binom{k}{m} \Delta^{k-m} \mu_{m+1} \right| &= \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} |\Delta^{k-m} \alpha_{m+1} - \Delta^{k-m} \beta_{m+1}| \\
&\leqq \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} \Delta^{k-m} \alpha_{m+1} + \sum_{k=m}^{\infty} \Delta^{k-m} \beta_{m+1} \\
&= \alpha_0 + \beta_0
\end{aligned}$$

である．

十分条件． 定理 9.15 により，もし (9.10) が成り立つならば，$\{\mu_n\}$ は二つの完全単調な数列 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ により

$$\mu_n = \alpha_n - \beta_n \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

と表されることを示せばよい．

$$\begin{aligned}
\Delta^k \mu_n = \mu_{n,k} &= \mu_{n+1,k} + \mu_{n,k+1} \\
&= \mu_{n+1,k} + \mu_{n+1,k+1} + \mu_{n,k+2}
\end{aligned}$$

$$=\mu_{n+1,k}+\mu_{n+1,k+1}+\mu_{n+1,k+2}+\mu_{n,k+3}$$
$$=\cdots$$

である．さらに(9.10)より $\lim_{r\to\infty}\mu_{n,k+r}=0$ で，かつ級数 $\sum_{r=0}^{\infty}\mu_{n+1,k+r}$ は絶対収束することがわかるゆえ

$$\Delta^k\mu_n=\sum_{r=0}^{\infty}\mu_{n+1,k+r} \tag{9.11}$$

である．ゆえに

$$|\mu_{n,k}|\leqq\sum_{r=0}^{\infty}|\mu_{n+1,k+r}| \tag{9.12}$$

である．いま．形式的に

$$\mu_{n,k,r}=\sum_{m=r}^{\infty}\binom{m}{r}\mu_{n+r+1,k+m-r},$$

$$\mu^*_{n,k,r}=\sum_{m=r}^{\infty}\binom{m}{r}|\mu_{n+r+1,k+m-r}|$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\mu_{n,k,r}=\mu_{n+r+1,k}&+(r+1)\mu_{n+r+1,k+1}\\&+\frac{(r+1)(r+2)}{1\cdot 2}\mu_{n+r+1,k+2}+\cdots\end{aligned} \tag{9.13}$$

である．次の二重級数を考える：

$$\begin{aligned}&\mu_{n+r+2,k}+\mu_{n+r+2,k+1}+\mu_{n+r+2,k+2}+\cdots\\&\qquad+(r+1)\mu_{n+r+2,k+1}+(r+1)\mu_{n+r+2,k+2}+\cdots\\&\qquad\qquad+\frac{(r+1)(r+2)}{1\cdot 2}\mu_{n+r+2,k+2}+\cdots\\&\qquad\qquad\qquad+\cdots.\end{aligned} \tag{9.14}$$

最初に，この二重級数の行ごとの和をとり，次に，さらに，それらの和をとると(9.11)と(9.13)より形式的に $\mu_{n,k,r}$ である．同様に最初にこの二重級数の列ごとの和をとり，次に，さらに，それらの和をとると，

$$\mu_{n+r+2,k}+(r+2)\mu_{n+r+2,k+1}+\frac{(r+2)(r+3)}{1\cdot 2}\mu_{n+r+2,k+2}+\cdots=\mu_{n,k,r+1}$$

である．

次に前記の二重級数の各項に絶対値をつけて得られる二重級数を考える．

この絶対値二重級数について，最初に列ごとの和をとり，次に，さらに，それらの和をとると

$$\sum_{m=r+1}^{\infty}\binom{m}{r+1}|\mu_{n+r+2,k+m-r-1}| \tag{9.15}$$

である．ここで

$$\binom{m}{r+1}\leqq\binom{m+k}{r+1}\leqq\binom{m+k+n}{r+1+n}$$

であって，さらに仮定 (9.10) より

$$\sum_{m=r+1}^{\infty}\binom{k+n+m}{n+r+1}|\mu_{n+r+2,k+m-r-1}|\leqq L$$

である．ここで L は n, r, k に無関係な定数である．

したがって級数 (9.15) は収束し，二重級数 (9.14) は絶対収束する．ゆえに前ページで形式的においた級数はすべて収束し， かつ $\mu^*_{n,k,r}$ の全体は有界集合をつくることもわかる．さらに $\mu_{n,k,0}=\mu_{n,k}$ とおくと,

$$\mu_{n,k,r}=\mu_{n,k,r+1},$$

$$\mu_{n,k,r}=\mu_{n,k,0}=\mu_{n,k},$$

$$\mu^*_{n,k,r}\geqq|\mu_{n,k,r}|=|\mu_{n,k}| \tag{9.16}$$

である．他方 (9.12) より

$$\begin{aligned}\mu^*_{n,k,r}&=|\mu_{n+r+1,k}|+(r+1)|\mu_{n+r+1,k+1}|+\frac{(r+1)(r+2)}{1\cdot 2}|\mu_{n+r+1,k+2}|+\cdots\\&\leqq|\mu_{n+r+2,k}|+|\mu_{n+r+2,k+1}|+|\mu_{n+r+2,k+2}|+\cdots\\&\qquad+(r+1)\{|\mu_{n+r+2,k+1}|+|\mu_{n+r+2,k+2}|+\cdots\}\\&\qquad+\frac{(r+1)(r+2)}{1\cdot 2}\{|\mu_{n+r+2,k+2}|+\cdots\}\\&\qquad+\cdots\end{aligned}$$

である．この最後の二重級数は正項ばかりからなり，その和は $\mu^*_{n,k,r+1}$ であるから

$$\mu^*_{n,k,r}\leqq\mu^*_{n,k,r+1}$$

である．$\mu^*_{n,k,r}$ の全体は有界であることから $\lim_{r\to\infty}\mu^*_{n,k,r}$ は収束する．その極限値を $\mu^*_{n,k}$ とおくと，(9.16) より

$$\mu_{n,k}\leqq|\mu_{n,k}|\leqq\mu^*_{n,k,r}\leqq\mu^*_{n,k} \tag{9.17}$$

である．特に

$$|\mu_n|=|\mu_{n,0}|\leqq\mu^*_{n,0}=\mu^*_n$$

とおく．

さらに

$$\begin{aligned}\mu^*_{n,k,r+1}-\mu^*_{n+1,k,r}&=\sum_{m=r+1}^{\infty}\binom{m}{r+1}|\mu_{n+r+2,k+m-r-1}|\\&\quad-\sum_{m=r}^{\infty}\binom{m}{r}|\mu_{n+r+2,k+m-r}|\\&=\sum_{m=r+1}^{\infty}\binom{m}{r+1}|\mu_{n+r+2,k+m-r-1}|\\&\quad-\sum_{m=r+1}^{\infty}\binom{m-1}{r}|\mu_{n+r+2,k+m-r-1}|\\&=\sum_{m=r+1}^{\infty}\binom{m-1}{r+1}|\mu_{n+r+2,k+m-r-1}|\\&=\sum_{m=r+1}^{\infty}\binom{m}{r+1}|\mu_{n+r+2,k+m-r}|=\mu^*_{n,k+1,r+1}\end{aligned}$$

において，$r\to\infty$ とすると

$$\mu^*_{n,k}-\mu^*_{n+1,k}=\mu^*_{n,k+1}$$

である．この左辺を $\Delta\mu^*_{n,k}$ と書くと

$$\mu^*_{n,k}=\Delta\mu^*_{n,k-1}=\cdots=\Delta^k\mu_n{}^*$$

である．ゆえに (9.17) より

$$|\Delta^k\mu_n|=|\mu_{n,k}|\leqq\mu^*_{n,k}=\Delta^k\mu_n{}^*.$$

ゆえに，いま

$$\alpha_n=\frac{1}{2}(\mu_n{}^*+\mu_n),\qquad\beta_n=\frac{1}{2}(\mu_n{}^*-\mu_n)\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと，

$$\mu_n=\alpha_n-\beta_n,\qquad\Delta^k\alpha_n\geqq0,\qquad\Delta^k\beta_n\geqq0\qquad(n,\ k=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

以上はラマヌジャンの証明であるが，定理 9.13 の (9.6) と本定理の (9.10) とが同値であることを直接に示すカットナーの証明もある．

§10. ハウスドルフ総和法

二つの無限行列 $A=(a_{n\nu})$，$B=(b_{n\nu})$ が与えられたとき，積 AB は行列 $C=(c_{n\nu})$，ただし

$$c_{n\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}b_{k\nu},$$

によって定義される．この $c_{n\nu}$ は任意の $n, \nu=0, 1, \cdots$ に対して，いつでも有限確定とは限らないので，一般に二つの無限行列が与えられたとき，その積は必ず存在するというわけではない．

一般に無限行列 A が与えられたとき，

$$AB=BA=I=(\delta_{n\nu})$$

であるような無限行列 B が存在するとき，B を A の**逆行列**といい A^{-1} で表す．ここで $\delta_{n\nu}$ はクロネッカーの δ である．A が特に $a_{nn}=a_n\neq 0$，$a_{n\nu}=0$ (ただし $n\neq\nu$) であるとき，すなわち

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & & O \\ & a_1 & \\ O & & a_2 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

であるとき，**対角行列**といわれる．このときは明らかに

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} {a_0}^{-1} & & O \\ & {a_1}^{-1} & \\ O & & {a_2}^{-1} \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

である．

いま三角行列 $D=(d_{n\nu})$ を

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & O \\ 1 & -1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ \cdots\cdots & & & \ddots \end{pmatrix},$$

すなわち

$$d_{n\nu}=\begin{cases}(-1)^{\nu}\dbinom{n}{\nu}=\dfrac{(-1)^{\nu}n!}{\nu!(n-\nu)!}, & \text{ただし}\quad 0\leqq\nu\leqq n,\\ 0, & \text{ただし}\quad \nu>n\end{cases}$$

により定義する．よく知られているように任意の $n=0, 1, \cdots$ に対して

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}d_{n\nu}x^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\binom{n}{\nu}x^{\nu}=(1-x)^{n}$$

である．いま $DD=C=(c_{n\nu})$ とおくと，

$$c_{n\nu}=\sum_{k=0}^{n}d_{nk}d_{k\nu},$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{n\nu}x^{\nu}=\sum_{k=0}^{n}d_{nk}\sum_{\nu=0}^{\infty}d_{k\nu}x^{\nu}=\sum_{k=0}^{n}d_{nk}(1-x)^{k}=x^{n}$$

であるから，$c_{n\nu}=\delta_{n\nu}$ である．よって，$C=I$，すなわち

$$D=D^{-1}$$

である．

実数列 $\{\mu_n\}$ が任意に与えられたとき，

$$M=\begin{pmatrix}\mu_0 & & & O\\ & \mu_1 & & \\ & & \mu_2 & \\ O & & & \ddots\end{pmatrix}$$

とおく．行列 D, M, D^{-1} はすべて三角行列で，積 $(DM)D^{-1}$ と $D(MD^{-1})$ はともに存在して，かつ等しい[1]．これを $A=DMD^{-1}=(a_{n\nu})$ と書くと

$$a_{n\nu}=\begin{cases}\dbinom{n}{\nu}\Delta^{n-\nu}\mu_{\nu}, & \text{ただし}\quad 0\leqq\nu\leqq n,\\ 0, & \text{ただし}\quad \nu>n\end{cases}$$

である．この三角行列 A によって与えられる数列－数列型総和法を**ハウスドルフ総和法**（$\boldsymbol{H}, \boldsymbol{\mu_n}$）という．この定義からすぐ次の定理がでる．

---

1) 一般に無限行列については積の結合法則は成立しない．たとえば

$$A=(a_{n\nu}),\quad a_{n\nu}=1\quad (n, \nu=0, 1, \cdots),$$

$$B=(b_{n\nu}),\quad b_{n\nu}=\begin{cases}1, & \text{ただし}\quad \nu=n+1\quad (n=0, 1, \cdots),\\ -1, & \text{ただし}\quad \nu=n-1\quad (n=1, 2, \cdots),\\ 0, & \text{それ以外のすべての}\ n, \nu,\end{cases}$$

$$C=(c_{n\nu}),\quad c_{n\nu}=1\quad (n, \nu=0, 1, \cdots)$$

とおくと，$(AB)C$ も $A(BC)$ も存在するが両者は等しくない．

定理 10.1.　任意の二つのハウスドルフ行列の積は交換可能である.

証明.　数列 $\{\mu_n\}$ に対して行列 $A=DMD^{-1}$ を定義したと同様に，数列 $\{\mu_n'\}$ に対して行列 $A'=DM'D^{-1}$ とおく．定理は

$$AA'=DMD^{-1}DM'D^{-1}=DMM'D^{-1}=DM'MD^{-1}=A'A$$

より明らかである．　(証明終)

定理 10.2.　任意の二つのパーマネントなハウスドルフ総和法は共存する.

この定理は次の一般的な定理と前定理とから導かれる.

定理 10.3.　もし行列 A, A' がともに行有限な T-行列で，かつ $AA'=A'A$ であるならば，A, A' により与えられる二つの数列－数列型総和法は共存する.

証明.　$A=(a_{n\nu})$，$A'=(a'_{n\nu})$ とおく．数列 $\{s_n\}$ に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}\sum_{\nu=0}^{\infty}a'_{k\nu}s_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}a'_{k\nu}\right)s_\nu,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a'_{nk}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{k\nu}s_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a'_{nk}a_{k\nu}\right)s_\nu$$

である．ここで仮定より $\sum$ はすべて有限個の和であるから，累次和の順序交換は差しつかえない．行列 A, A' の積は仮定より交換可能であるゆえ，上式より

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}\sum_{\nu=0}^{\infty}a'_{k\nu}s_\nu=\sum_{k=0}^{\infty}a'_{nk}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{k\nu}s_\nu$$

である．いま $\{s_n\}$ が

$$t_k=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{k\nu}s_\nu,\qquad \lim_{k\to\infty}t_k=s;\ t_k'=\sum_{\nu=0}^{\infty}a'_{k\nu}s_\nu,\qquad \lim_{k\to\infty}t_k'=s'$$

であると仮定すると，

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}t_k'=\sum_{k=0}^{\infty}a'_{nk}t_k$$

である．仮定より行列 A, A' は T-行列であるゆえ $s=s'$ である.

(証明終)

次に (H,μ_n)-総和法がパーマネントであるための必要十分条件を求めよう．定理 2.1 より，それは

(i)　$$\sum_{\nu=0}^{n}\left|\binom{n}{\nu}\Delta^{n-\nu}\mu_\nu\right|\leqq L\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots),$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{\nu}\varDelta^{n-\nu}\mu_\nu=0 \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots),$$

(iii) $$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\varDelta^{n-\nu}\mu_\nu\right\}=1$$

である．ここで L は n に無関係な定数である．

条件(i)が成り立つための必要十分条件は，定理 9.13 より数列 $\{\mu_n\}$ がモーメント数列であること，すなわち $[0, 1]$ で有界変動な関数 $\phi(x)$ により

$$\mu_n=\int_0^1 x^n d\phi(x) \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

と表されることである．ここで $\phi(0)=0$ とする．

条件(iii)は，

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\varDelta^{n-\nu}\mu_\nu=\mu_0=\int_0^1 d\phi(x)=\phi(1)-\phi(0)$$

なるゆえ，$\phi(1)=1$ と同値である．

条件（ii）において

$$a_{n\nu}=\binom{n}{\nu}\varDelta^{n-\nu}\mu_\nu=\binom{n}{\nu}\int_0^1 x^\nu(1-x)^{n-\nu}d\phi(x) \qquad (0\leqq\nu\leqq n)$$

なるゆえ，もし $\lim_{n\to\infty}a_{n\nu}=0$ $(\nu=0,\ 1,\ \cdots)$ と仮定すれば，特に $\nu=0$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1(1-x)^n d\phi(x)=0$$

である．この左辺は $\phi(+0)$ であることを示そう．

いま $\eta(x)$ は $[0, 1]$ において単調増加，かつ有界で，$\eta(0)=0$ なる任意の関数とする．

(10.1) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1(1-x)^n d\eta(x)=\eta(+0)$$

をまず示そう．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$0<\sigma<1$ なる σ を十分小さくとり，かつ n を十分大きくとれば

$$\begin{aligned}\int_0^1(1-x)^n d\eta(x)&=\int_0^\sigma(1-x)^n d\eta(x)+\int_\sigma^1(1-x)^n d\eta(x)\\&\leqq\int_0^\sigma d\eta(x)+(1-\sigma)^n\int_\sigma^1 d\eta(x)\end{aligned}$$

$$\leqq \eta(\sigma)+(1-\sigma)^n\eta(1)$$
$$<\eta(+0)+2\varepsilon$$

とできる．他方 $0<\sigma<\sigma_0(\varepsilon, n)$ に対して

$$\int_0^1(1-x)^n d\eta(x) \geqq \int_0^\sigma (1-x)^n d\eta(x) \geqq (1-\sigma)^n \int_0^\sigma d\eta(x)$$
$$=(1-\sigma)^n\eta(\sigma)>\eta(+0)-\varepsilon$$

とできる．ゆえに (10.1) が証明された．

定理 9.2 より $\psi(x)$ は $[0, 1]$ で単調増加で有界な，かつ $x=0$ で 0 となる二つの関数 $\eta(x)$，$\zeta(x)$ により

$$\psi(x)=\eta(x)-\zeta(x)$$

と表されるから，いま証明したことと定理 9.5 より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1(1-x)^n d\psi(x)=\psi(+0)$$

である．したがって，もし $\lim_{n\to\infty} a_{n0}=0$ であるならば，$\psi(+0)=\psi(0)=0$ である．

逆に，もし $\psi(+0)=\psi(0)$ と仮定すると，$0<\sigma<1$ なる σ に対して

$$|a_{n\nu}| \leqq \binom{n}{\nu}\int_0^1 x^\nu(1-x)^{n-\nu}|d\psi(x)|$$
$$\leqq \int_0^\sigma |d\psi(x)|+\binom{n}{\nu}\int_\sigma^1 x^\nu(1-x)^{n-\nu}|d\psi(x)| \qquad (0\leqq\nu\leqq n)$$

である．ここで $\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}=1$ なる式より

$$0\leqq\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}\leqq 1 \qquad (0\leqq\nu\leqq n,\ 0\leqq x\leqq 1)$$

は明らかである．さらに

$$|a_{n\nu}|\leqq\int_0^\sigma|d\psi(x)|+\binom{n}{\nu}(1-\sigma)^{n-\nu}\int_0^1|d\psi(x)|=I_1+I_2$$

とおく．任意に $\varepsilon>0$ を与えるとき，σ を十分小さくとれば仮定より $I_1<\varepsilon$ である．また任意に固定した $\nu=0, 1, \cdots$ に対して n を十分大きくとれば $I_2<\varepsilon$ である．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu}=0 \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．

以上のことから条件（ii）は $\phi(+0)=\phi(0)$ と同値である．したがって次の定理が証明された．

定理 10.4. 総和法 (H, μ_n) がパーマネントであるための必要十分条件は，$[0, 1]$ で有界変動，かつ

$$\phi(+0)=\phi(0)=0, \qquad \phi(1)=1$$

なる関数 $\phi(x)$ により

$$\mu_n=\int_0^1 x^n d\phi(x) \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

と表されることである．

一般に $\phi(x)$ を $[0, 1]$ で有界変動で $\phi(0)=0$ なる関数とし

$$\mu_n=\int_0^1 x^n d\phi(x) \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるとき，(H, μ_n)-総和法を **(H, ϕ)-総和法**とも書く．

例 1. $k>0$ とし

$$\phi(x)=1-(1-x)^k \qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

とすると，(H, ϕ)-総和法はチェザロ総和法 (C, k) となる．このときは

$$\mu_n=\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+k+1)}=k\int_0^1 x^n(1-x)^{k-1}dx \quad (n=0,\ 1,\ \cdots).$$

例 2. 数列 $\{s_n\}$ が与えられたとき，

$$h_n^{(1)}=\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1} \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots),$$

$$h_n^{(k)}=\frac{h_0^{(k-1)}+h_1^{(k-1)}+\cdots+h_n^{(k-1)}}{n+1} \qquad (k=2,\ 3,\ \cdots;\ n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおく．もし $\lim_{n\to\infty} h_n^{(k)}=s$ ならば，$\{s_n\}$ は値 s に**ヘルダー(H, k)-総和可能**という．

$$\phi(x)=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^x \left(\log\frac{1}{t}\right)^{k-1} dt \qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

とおくと，(H, ϕ)-総和法はヘルダー総和法 (H, k) となる．このときは $\mu_n=(n+1)^{-k}$ $(n=0, 1, \cdots)$ である．

例 3. p を $0<p\leqq 1$ とし

$$\phi(x)=\begin{cases} 0, & \text{ただし}\ 0\leqq x<p, \\ 1, & \text{ただし}\ p\leqq x\leqq 1 \end{cases}$$

とおくと，(H, ϕ)-総和法は**オイラー総和法 E_p** となる．このときは $\mu_n=p^n$ $(n=0, 1, \cdots)$ である．ただし $0^0=1$ とおく．

E_1-総和法は普通の収束となる．明らかに E_p-総和法 $(0<p\leqq 1)$ はパーマネントである．

定理 10.4 を使い二つのハウスドルフ総和法の強弱を比較しよう．

定理 10.5.　数列 $\{\mu_n\}$, $\{\mu_n'\}$ がある．ただし $\mu_n'\neq 0$ $(n=0, 1, \cdots)$ とする．$(H, \mu_n')\subseteqq(H, \mu_n)$ であるための必要十分条件は，

$$\frac{\mu_n}{\mu_n'}=\int_0^1 x^n d\psi(x) \qquad (n=0, 1, \cdots),$$
$$\psi(+0)=\psi(0)=0, \qquad \psi(1)=1$$

であるような [0, 1] における有界変動な関数 $\psi(x)$ が存在することである．

証明.　本節はじめで定義された行列 D と行列

$$M=\begin{pmatrix} \mu_0 & & O \\ & \mu_1 & \\ O & & \mu_2 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad M'=\begin{pmatrix} \mu_0' & & O \\ & \mu_1' & \\ O & & \mu_2' \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

を使い $DMD^{-1}=A=(a_{n\nu})$, $DM'D^{-1}=A'=(a'_{n\nu})$ とおく．数列 $\{s_n\}$ が与えられたとき

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu, \qquad t_n'=\sum_{\nu=0}^{\infty} a'_{n\nu}s_\nu \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

とする．また行列

$$S=\begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 & \cdots \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots \\ s_2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad T=\begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 & \cdots \\ t_1 & 0 & 0 & \cdots \\ t_2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad T'=\begin{pmatrix} t_0' & 0 & 0 & \cdots \\ t_1' & 0 & 0 & \cdots \\ t_2' & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

とおくと，$T=AS$, $T'=A'S$ である．明らかに

$$(M')^{-1}=\begin{pmatrix} 1/\mu_0' & & O \\ & 1/\mu_1' & \\ O & & 1/\mu_2' \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

で，かつ $(A')^{-1}=(DM'D^{-1})^{-1}=D(M')^{-1}D^{-1}$ であるから，$S=(A')^{-1}T'=D(M')^{-1}D^{-1}T'$ である．ゆえに

$$T=AS=DMD^{-1}D(M')^{-1}D^{-1}T'=DM(M')^{-1}D^{-1}T'$$

である．$(H, \mu_n')\subseteqq(H, \mu_n)$ は，したがって行列 $DM(M')^{-1}D^{-1}$ が T-行列であることと同値である．

$$M(M')^{-1}=\begin{pmatrix} \mu_0/\mu_0' & & & O \\ & \mu_1/\mu_1' & & \\ O & & \mu_2/\mu_2' & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

なるゆえ前定理より証明が終る.

例 1. $0<k'<k$ のとき，総和法 (C, k)，(C, k') にはそれぞれモーメント定数 $\mu_n=\dfrac{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+k+1)}$，$\mu_n'=\dfrac{\Gamma(k'+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+k'+1)}$ $(n=0, 1, \cdots)$ が対応する.

$$\frac{\mu_n}{\mu_n'}=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k'+1)\Gamma(k-k')}\int_0^1 x^{n+k'}(1-x)^{k-k'-1}dx$$

なるゆえ,

$$\phi(x)=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k'+1)\Gamma(k-k')}\int_0^x t^{k'}(1-t)^{k-k'-1}dt$$

とおくことにより $(C, k')\subseteqq(C, k)$ が確かめられる.

例 2. k, k' は $1\leqq k'<k$ なる整数とする. 総和法 (H, k)，(H, k') にはそれぞれモーメント定数 $\mu_n=(n+1)^{-k}$，$\mu_n'=(n+1)^{-k'}$ $(n=0, 1, \cdots)$ が対応する.

$$\frac{\mu_n}{\mu_n'}=\frac{1}{(n+1)^{k-k'}}=\frac{1}{(k-k'-1)!}\int_0^1 x^n\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-k'-1}dx$$

なるゆえ,

$$\phi(x)=\frac{1}{(k-k'-1)!}\int_0^x\left(\log\frac{1}{t}\right)^{k-k'-1}dt$$

とおくことにより $(H, k')\subseteqq(H, k)$ が示される.

例 3. $0<p<p'\leqq 1$ のとき $E_{p'}\subseteqq E_p$ であることは容易に示される.

定理 10.6. (**クノップ・シュネーの定理**) $k=1, 2, \cdots$ に対して

$$(C, k)\cong(H, k)$$

である.

証明. 前定理より

$$\left\{\frac{(n+1)^k}{\binom{n+k}{n}}\right\}_{n=0,1,\cdots},\qquad \left\{\frac{\binom{n+k}{n}}{(n+1)^k}\right\}_{n=0,1,\cdots}$$

がそれぞれ $[0, 1]$ で有界変動で，かつ $\phi(+0)=\phi(0)=0$，$\phi(1)=1$ なる性質をもつ二つの関数 $\phi(x)$ によりモーメント数列として表されることを示せばよい.

$(C, k)\supseteqq(H, k)$ の証明. いま

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0,\ ただし\quad x=0, \\ e^{-x}\dfrac{d^k}{dx^k}\{e^x(1-e^{-x})^k\}=\displaystyle\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}(-1)^{m+k}(m-1)^k e^{-mx}, \\ \hfill ただし\quad x>0 \end{cases}$$

とおくと，部分積分により

$$\int_0^\infty e^{-nx}d\varphi(x)=\begin{cases} 1 & (n=0) \\ n(n+1)^k\displaystyle\int_0^\infty e^{-nx}(1-e^{-x})^k dx & (n=1,2,\cdots), \end{cases}$$
$$=\frac{(n+1)^k}{\dbinom{n+k}{n}}\qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

である[2]．いま

$$(10.2)\qquad \psi(x)=\begin{cases} 0, & ただし\quad x=0, \\ 1-\varphi\left(\log\dfrac{1}{x}\right), & ただし\quad 0<x\leqq 1 \end{cases}$$

とおくと，$\psi(x)$ は $[0,\ 1]$ で有界変動で，かつ $\psi(+0)=\psi(0)=0$，$\psi(1)=1$ で

$$\int_0^1 x^n d\psi(x)=\int_0^\infty e^{-nx}d\varphi(x)=\frac{(n+1)^k}{\dbinom{n+k}{n}}\qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．

$(C,\ k)\subseteqq(H,\ k)$ の証明．いま

$$\varphi(0)=0,\qquad \varphi(+0)=\frac{1}{k!},$$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{k!(k-1)!}\overbrace{e^{-x}\frac{d}{dx}e^{-x}\frac{d}{dx}\cdots e^{-x}\frac{d}{dx}}^{k}\{e^{(k-1)x}x^{k-1}\}\qquad (x>0)$$

とおくと，部分積分により

$$\int_0^\infty e^{-nx}d\varphi(x)=\frac{(n+1)}{k!(k-1)!}\int_0^\infty e^{-(n+1)x}\overbrace{e^{-x}\frac{d}{dx}\cdots e^{-x}\frac{d}{dx}}^{k-1}\{e^{(k-1)x}x^{k-1}\}$$

---

2)　$\varphi(+0)=k!$,　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{d^m}{dx^m}\{e^x(1-e^{-x})^k\}=0$　$(m=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1)$.

$$=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k!(k-1)!}\int_0^\infty e^{-(n+1)x}x^{k-1}dx$$

$$=\frac{\binom{n+k}{n}}{(n+1)^k}\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

である[3]．特に $n=0$ とすると

$$\varphi(\infty)=\int_0^\infty d\varphi(x)=1$$

である．(10.2) により $\psi(x)$ を定義すると

$$\int_0^1 x^n d\psi(x)=\frac{\binom{n+k}{n}}{(n+1)^k}\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

§11. オイラー総和法

すでに§10 でハウスドルフ総和法の特別の場合としてオイラー総和法 E_p を述べた．この総和法は，行列 $E_p=(a_{n\nu})$

$$a_{n\nu}=\begin{cases}\binom{n}{\nu}p^\nu(1-p)^{n-\nu}, & ただし\quad 0\leqq\nu\leqq n,\\ 0, & ただし\quad \nu>n\end{cases}$$

により定義される数列－数列型総和法である．$0^0=1$ とおくと，$p=1$ の場合は普通の収束となる．$p=0$ に対しては，任意の数列 $\{s_n\}$ に対して

$$t_n=\sum_{\nu=0}^\infty a_{n\nu}s_\nu=s_0\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

となり，つまらないものとなるので，この場合は省くことにする．$0<p\leqq 1$ に対しては E_p-総和法はパーマネントとなることもすでに述べた．しかし本書では E_p-総和法を $p\neq 0$ であるような任意の複素数について考えることにする．

---

3)
$$\int_0^\infty e^{-nx}d\varphi(x)=\frac{1}{k!}+\int_0^\infty e^{-nx}\varphi'(x)dx,$$

$$\lim_{x\to+0}\overbrace{e^{-x}\frac{d}{dx}\cdots e^{-x}\frac{d}{dx}}^{k-1}\{e^{(k-1)x}x^{k-1}\}=(k-1)!.$$

この総和法は最初オイラー（1755）により $p=1/2$ の場合を考えられ，その後クノップにより組織的に研究された．それで**オイラー・クノップ総和法**ともいわれる．クノップは，$p=1/2^k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots)$ なる場合を研究した．負の数，および一般の複素数 p の場合について，この総和法をはじめて研究したのはアグニュー（1944）である．

次の定理はシルバーマン・テープリッツの定理から容易にわかる．

定理 11.1. E_p-総和法がパーマネントであるための必要十分条件は p が $0<p\leqq 1$ なる実数であることである．

さて数列 $\{s_n\}=\boldsymbol{s}$ の E_p-変換は

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}p^{\nu}(1-p)^{n-\nu}s_{\nu}\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるが，いま $\boldsymbol{t}=\{t_n\}$ とおくと，この変換は $\boldsymbol{t}=E_p\boldsymbol{s}$ と書くこともできる（§2 参照）．この $\{t_n\}$ にさらに E_q-変換を行うと

$$\tau_n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}q^{\nu}(1-q)^{n-\nu}t_{\nu}\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

となる．いま $\boldsymbol{\tau}=\{\tau_n\}$ とおくと，

$$\boldsymbol{\tau}=E_q\boldsymbol{t}=E_q(E_p\boldsymbol{s})$$

と書くことができる．このとき $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=s$ により一つの総和法を定義することができる．一般にこのように二つの変換の重量により定義される総和法を**積総和法**といい，この場合には

$$E_q\cdot E_p\text{-}\lim_{n\to\infty}s_n=s$$

と書く．このような記法は一般に任意の数列－数列型総和法 A, B についても行う．次の定理を証明しよう．

定理 11.2. 任意の数列 $\{s_n\}$ に対して

$$E_q(E_p\boldsymbol{s})=E_{qp}\boldsymbol{s}.$$

証明. 数列 $\{s_n\}$ の E_p-変換は

$$t_k=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}p^{\nu}(1-p)^{k-\nu}s_{\nu}\qquad(k=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．数列 $\{t_k\}$ の E_q-変換は

$$\tau_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}t_k$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}p^\nu(1-p)^{k-\nu}s_\nu$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(qp)^\nu\sum_{k=\nu}^{n}\binom{n-\nu}{k-\nu}(q-qp)^{k-\nu}(1-q)^{n-k}s_\nu$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(qp)^\nu\sum_{k=0}^{n-\nu}\binom{n-\nu}{k}(q-qp)^k(1-q)^{n-\nu-k}s_\nu$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(qp)^\nu(1-qp)^{n-\nu}s_\nu$$

である．　(証明終)

系． p, q はともに 0 でない複素数とし，両者の間にもし $q=\theta p$（ただし θ は $0<\theta\leqq 1$ なる実数）なる関係があるならば

$$E_p\subseteqq E_q.$$[1]

証明． $E_\theta(E_p\boldsymbol{s})=E_q\boldsymbol{s}$ と定理 11.1 より明らかである．

定理 11.3. p, q はともに 0 でない任意の複素数とすると，行列 E_p, E_q, E_{pq} の間には $E_pE_q=E_{pq}$ なる関係がある．

証明． 前定理と同様であるから略する，

系． $p\neq 0$ ならば $(E_p)^{-1}=E_{1/p}$.

これまで述べた E_p-総和法は数列－数列変換により定義されたが，同じ総和法を級数－級数変換により定義しようとすると，どのようになるであろうか．

定理 11.4. $p\neq 0$ は任意の複素数とし，与えられた級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ に対し，$s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ $(n=0,1,\cdots)$ とし，さらに

$$v_0=u_0,$$
$$v_{\mu+1}=p\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}p^\nu(1-p)^{\mu-\nu}u_{\nu+1}\qquad(\mu=0,1,\cdots)$$

とすると，

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}p^\nu(1-p)^{n-\nu}s_\nu=\sum_{\mu=0}^{n}v_\mu\qquad(n=0,1,\cdots)$$

1) 定理 10.5 の例 3 は，この特別の場合である．

である．

証明． いま $Eu_\nu=u_{\nu+1}$ なる演算 E を考え，$E^0u_\nu=u_\nu$，$E^n=EE^{n-1}$ $(n=1, 2, \cdots)$ とすると

$$v_{\mu+1}=p\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}p^\nu(1-p)^{\mu-\nu}E^{\nu+1}u_0$$

と書ける．ここで E の代りに x とすると，

$$p\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}p^\nu(1-p)^{\mu-\nu}x^{\nu+1}$$
$$=px(px+1-p)^\mu \qquad (\mu=0, 1, \cdots)$$

である．ゆえに $\sum_{\mu=0}^{n-1}v_{\mu+1}$ に対応して

$$\sum_{\mu=0}^{n-1}px(px+1-p)^\mu=x\frac{(px+1-p)^n-1}{x-1}$$

が得られる．

上式で $p=\dfrac{1}{q+1}$ とおくと，

$$\sum_{\mu=0}^{n-1}px(px+1-p)^\mu=\frac{x}{(q+1)^n}\frac{(q+x)^n-(q+1)^n}{x-1}$$
$$=\frac{x}{(q+1)^n}\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}q^{n-\nu}(1+x+\cdots+x^{\nu-1})$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}p^\nu(1-p)^{n-\nu}(x+x^2+\cdots+x^\nu)$$

である．ゆえに

$$\sum_{\mu=0}^{n-1}v_{\mu+1}=\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}p^\nu(1-p)^{n-\nu}(E+E^2+\cdots+E^\nu)u_0$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}p^\nu(1-p)^{n-\nu}(u_1+u_2+\cdots+u_\nu)$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}p^\nu(1-p)^{n-\nu}(s_\nu-s_0)$$

である．他方

$$v_0=u_0=s_0=s_0\{p+(1-p)\}^n$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}p^\nu(1-p)^{n-\nu}s_0$$

なるゆえ，

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=0}^{n} v_\mu &= v_0 + \sum_{\mu=0}^{n-1} v_{\mu+1} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} p^\nu (1-p)^{n-\nu} s_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} p^\nu (1-p)^{n-\nu} (s_\nu - s_0) \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} p^\nu (1-p)^{n-\nu} s_\nu = t_n\end{aligned}$$

が得られる．　　　　（証明終）

さて，いま $p \neq 0$ とし，数列 $\{s_n\}$ は E_p-総和可能とすると，

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} p^\nu (1-p)^{n-\nu} s_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

なる数列 $\{t_n\}$ は収束する，ゆえに有界，すなわち

$$|t_n| \leqq H \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．定理 11.3 系より，E_p-変換の逆変換は $E_{1/p}$-変換であるから

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left(\frac{1}{p}\right)^\nu \left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-\nu} t_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．ゆえに

$$\begin{aligned}|s_n| &\leqq H \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left|\frac{1}{p}\right|^\nu \left|1-\frac{1}{p}\right|^{n-\nu} \\ &= H\left(\left|\frac{1}{p}\right| + \left|1-\frac{1}{p}\right|\right)^n\end{aligned}$$

である．

ゆえに，もし級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left|\frac{1}{p}\right|+\left|1-\frac{1}{p}\right|\right)^n |z|^n$ が収束するならば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |s_n||z^n|$，したがって $\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$ も収束する．ところが $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left|\frac{1}{p}\right|+\left|1-\frac{1}{p}\right|\right)^n |z|^n$ は

$$|z| < \left(\left|\frac{1}{p}\right| + \left|1-\frac{1}{p}\right|\right)^{-1}$$

なるすべての z に対して収束するから，$\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$ の収束半径は少なくとも $\left(\left|\frac{1}{p}\right|+\left|1-\frac{1}{p}\right|\right)^{-1}$ である．

いま $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ の部分和の列を $\{s_n\}$ とする．すなわち

$$u_n = s_n - s_{n-1} \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots), \qquad s_{-1}=0.$$

もし $\{s_n\}$ が E_p-総和可能であるならば，上述のように

$$|s_n| \leqq HR^n \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots),$$

ただし $R=\left|\frac{1}{p}\right|+\left|1-\frac{1}{p}\right|$，が成り立つ．ゆえに

$$|u_n| \leqq |s_n|+|s_{n-1}| \leqq H\left(1+\frac{1}{R}\right)R^n$$

である．よって上と同様にして，もし $\{s_n\}$ が，すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が E_p-総和可能であるならば，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ の収束半径は少なくとも $\left(\left|\frac{1}{p}\right|+\left|1-\frac{1}{p}\right|\right)^{-1}$ である．ゆえに次の定理が証明された．

定理 11.5. もし $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$，あるいはその部分和の列 $\{s_n\}$ が E_p-総和可能であるならば，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ および $\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$ の収束半径はともに少なくとも $\left(\left|\frac{1}{p}\right|+\left|1-\frac{1}{p}\right|\right)^{-1}$ である．

次の定理は E_p-総和法の基本的性質である．

定理 11.6. $p\neq 0$ とし，もし巾級数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

が正の収束半径をもつならば，$f\left(\frac{1}{z}\right)$ を $z=\infty$ の近傍で $\left\{z-\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\}^{-1}$ の巾で展開して，$z=1$ を代入して得られる級数の第 n 部分和は

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}p^{\nu}(1-p)^{n-\nu}s_{\nu}$$

である．ここで s_ν は $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ の第 ν 部分和である．

証明. いま $1-\frac{1}{p}=q$ とおくと，$|z|$ の大きな値に対して

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=u_0+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u_{\nu+1}}{(z-q)^{\nu+1}}\frac{1}{\left(1+\frac{q}{z-q}\right)^{\nu+1}}$$

$$=u_0+\frac{1}{z-q}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u_{\nu+1}}{(z-q)^{\nu}}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\binom{\nu+\lambda}{\nu}\left(\frac{-q}{z-q}\right)^{\lambda}$$

である．ワイヤシュトラスの二重級数定理[2)]により，$\dfrac{1}{z-q}$ の巾でそろえると

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=u_0+\frac{1}{z-q}\sum_{\nu=0}^{\infty}u_{\nu+1}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\binom{\mu}{\nu}\frac{(-q)^{\mu-\nu}}{(z-q)^{\mu}}$$

$$=u_0+\frac{1}{z-q}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{(z-q)^{\mu}}\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}(-q)^{\mu-\nu}u_{\nu+1}$$

である．ここで $z=1$ を代入すると，右辺は

$$u_0+\frac{1}{1-q}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q)^{\mu}}\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}(-q)^{\mu-\nu}u_{\nu+1}$$

$$=u_0+\sum_{\mu=0}^{\infty}p\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}p^{\nu}(1-p)^{\mu-\nu}u_{\nu+1}$$

である．この級数の第 n 部分和は，定理 11.4 より

$$u_0+\sum_{\mu=0}^{n-1}p\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}p^{\nu}(1-p)^{\mu-\nu}u_{\nu+1}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}p^{\nu}(1-p)^{n-\nu}s_{\nu}$$

である．　（証明終）

数列 $\{z^n\}$ に E_p-総和法を適用しよう．

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}p^{\nu}(1-p)^{n-\nu}z^{\nu}$$

$$=(1-p+pz)^n \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

となるから，$z=1$ とすると $t_n=1$ $(n=0, 1, \cdots)$ となり $\lim_{n\to\infty}t_n=1$ である．

$z\neq1$ に対しては，$\lim_{n\to\infty}t_n$ が収束するための必要十分条件は $|1-p+pz|<1$，すなわち

$$\left|z-\left(1-\frac{1}{p}\right)\right|<\frac{1}{|p|}$$

なることである．

ゆえに $p\neq0$ を固定するとき，$\{z^n\}$ が E_p-総和可能であるような z の値は，$z=1$ と，中心が $1-\dfrac{1}{p}$ で半径が $1/|p|$ なる円 $C(p)$ の内部である．

---

2)　クノップ [14] 444 ページ参照．

特に $p=1$ とすると，円 $C(1)$ は単位円である．また $p=-1$ とすると，円 $C(-1)$ は中心が 2 で半径 1 の円である．ゆえに $\{z^n\}$ は単位円の内部，すなわち $|z|<1$ では E_{-1}–総和可能ではない．容易にわかるように，$\mathscr{F}(E_{10})\subset\mathscr{F}(E_1)\subset\mathscr{F}(E_{1/10})$ である．

数列 $s_0, s_1, s_2, \cdots$ がもし収束するならば，数列 $s_1, s_2, \cdots$ も収束し，それらの極限値は等しい．この逆が成り立つことも明らかである．しかし一般の総和法については必ずしもこのようにはならない．

数列 $\{s_n\}_{n=0,1,\cdots}$ が値 s に A–総和可能であるならば，いつでも数列 $\{s_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が同じ値に A–総和可能であるとき，総和法 A は**右へ転移的**[3)]といい，この逆が成り立つとき，総和法 A は**左へ転移的**という．左右に転移的であるときは単に**転移的**であるという．次の定理 11.7 と定理 11.8 はともにアグニューによる．

定理 11.7.　E_p–総和法は任意の $p\neq0$ に対して右へ転移的である．

証明.　数列 $s_0, s_1, s_2, \cdots$ の E_p–変換を

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}p^\nu(1-p)^{n-\nu}s_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とし，数列 $s_1, s_2, \cdots$ の E_p–変換を

$$\tau_n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}p^\nu(1-p)^{n-\nu}s_{\nu+1} \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと，

$$\tau_n=\left(1-\frac{1}{p}\right)t_n+\frac{1}{p}t_{n+1} \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

より定理は明らかである．　(証明終)

定理 11.8.　E_p–総和法が左へ転移的であるための必要十分条件は

$$|1-p|<1$$

なることである．

証明.　t_n，τ_n は前定理と同じとする．E_p–変換の逆変換は $E_{1/p}$–変換であることを使って

3)　この左右の定義を反対に使用する著者もいる．

$$t_n=(1-p)^n s_0+\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}p^\nu(1-p)^{n-\nu}s_\nu$$

$$=(1-p)^n s_0+\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n}{\nu+1}p^{\nu+1}(1-p)^{n-\nu-1}s_{\nu+1}$$

$$=(1-p)^n s_0+\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n}{\nu+1}p^{\nu+1}(1-p)^{n-\nu-1}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\left(\frac{1}{p}\right)^k\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\nu-k}\tau_k$$

$$=(1-p)^n s_0+\sum_{k=0}^{n-1}p(1-p)^{n-k-1}\tau_k\sum_{\nu=k}^{n-1}\binom{n}{\nu+1}\binom{\nu}{k}(-1)^{\nu-k}$$

である．ここで

$$\sum_{k=0}^{n-1}z^k\sum_{\nu=k}^{n-1}\binom{n}{\nu+1}\binom{\nu}{k}(-1)^{\nu-k}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n}{\nu+1}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}(-1)^{\nu-k}z^k$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n}{\nu+1}(z-1)^\nu$$

$$=\frac{1}{z-1}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(z-1)^\nu-\frac{1}{z-1}$$

$$=\frac{z^n-1}{z-1}=\sum_{k=0}^{n-1}z^k$$

である．z は任意であるから

$$\sum_{\nu=k}^{n-1}\binom{n}{\nu+1}\binom{\nu}{k}(-)^{\nu-k}=1 \qquad (0\leqq k\leqq n-1),$$

ゆえに

$$(11.1) \qquad t_n=(1-p)^n s_0+\sum_{k=0}^{n-1}p(1-p)^{n-k-1}\tau_k$$

である．いま，

$$\lambda_n=\sum_{k=0}^{n}p(1-p)^{n-k}\tau_k \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

なる変換を考えると，この変換は行列 $A=(a_{nk})$,

$$a_{nk}=\begin{cases} p(1-p)^{n-k}, & \text{ただし}\ 0\leqq k\leqq n,\\ 0, & \text{ただし}\ k>n\end{cases}$$

によって与えられる数列－数列変換である． 行列 A が T-行列であるため

の必要十分条件は，$|1-p|<1$ である．このことと (11.1) とから定理は明らかである．　(証明終)

E_p-総和法の共存性に関する次の定理はアグニューによるが，本書ではマイヤーケーニッヒ・ツェラーによる証明を紹介しよう．

定理 11.9. 任意の $p\neq 0$, $q\neq 0$ に対して E_p-総和法と E_q-総和法は共存する．

証明. 証明を三段階に分ける．

(i) もし $|\alpha|=1$ なる任意の α に対して，E_α-総和法と E_1-総和法との共存性が証明されるならば，任意の $p\neq 0$, $q\neq 0$ に対して E_p-総和法と E_q-総和法が共存することが次のようにしてわかる．

$|p|\leqq|q|$ であって，かつ

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}p^\nu(1-p)^{n-\nu}s_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots),$$

$$\tau_n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}q^\nu(1-q)^{n-\nu}s_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots),$$

$\lim_{n\to\infty}t_n=t$, $\lim_{n\to\infty}\tau_n=\tau$ と仮定する．いま

$$u=\frac{|p|q}{p|q|}, \qquad v=\frac{|p|}{|q|}$$

とおくと，$|u|=1$, $0<v\leqq 1$ である．定理 11.2 より任意の数列 $\boldsymbol{s}=\{s_n\}$ に対して

$$E_u(E_p\boldsymbol{s})=E_v(E_q\boldsymbol{s})$$

である．E_v-総和法がパーマネントであることから，上式右辺の数列は τ に収束する．ゆえに数列 $\{t_n\}$ は値 τ に E_u-総和可能である．

他方 $\{t_n\}$ は値 t に収束する，すなわち t に E_1-総和可能である．仮定より E_1-総和法と E_u-総和法は共存するから $t=\tau$ である．

(ii) 第 (i) 段階で仮定していたこと，すなわち $|p|=1$ なる任意の p に対して E_p-総和法と E_1-総和法が共存することをここで証明しよう．ここでは $p\neq -1$ の場合について行う．$p=1$ に対しては明らかである．

数列 $\{s_n\}$，ただし

$$s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots),$$

は s に収束し，かつ値 t に E_p–総和可能と仮定する．いま

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n z^n$$

とすると，仮定よりこの巾級数は $z=1$ で収束し，$|z|<1$ に対して正則である．ゆえに

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\frac{1}{z^n}$$

は $z=\infty$ を含めて $|z|>1$ に対して正則で，かつ $z=1$ で収束する．この $f\left(\frac{1}{z}\right)$ を $\left(z-\frac{p-1}{p}\right)^{-1}$ の巾で展開し

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{1}{\left(z-\frac{p-1}{p}\right)^n}$$

とおく．仮定より $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ は値 t に E_p–総和可能であるから，定理 11.6 よりこの右辺の級数に $z=1$ を代入すると t に収束する．ゆえに上式右辺の級数は少なくとも

$$\left|z-\frac{p-1}{p}\right|>\frac{1}{|p|}$$

に対して収束する．$f\left(\frac{1}{z}\right)$ の上述のような二とおりの展開における，展開領域の円周はそれぞれ

$$|z|=1,\qquad \left|z-\frac{p-1}{p}\right|=\frac{1}{|p|}$$

であって，この二つの円周は $z=1$ で接しないで交わっている．したがって z–平面上で，$z=1$ で終る適当な半直線 l をえらぶと，アーベルの定理[4) より，l 上をとおり $z=1$ に近づけるとき

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in l}}f\left(\frac{1}{z}\right)=s,\qquad \text{かつ}\qquad \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in l}}f\left(\frac{1}{z}\right)=t$$

となり，$s=t$ となる．

(iii)　E_1–総和法と E_{-1}–総和法が共存することを示そう．そのために次の補助定理を証明する．

補助定理 11.10.　$\{u_n\}$ は有界な数列とし，

---

4)　辻 [2] 103 ページ，本書定理 15.2 参照．

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n z^n$$

とする．級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ の E_{-1}-級数－級数変換を $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ とする．さらに数列 $\{b_n\}$ も有界であるならば，$f(z)$ は $z=\infty$ を含めた全 z-平面で，点 $z=1$ を除いて正則であって，かつ $g(w)=f\left(\dfrac{w}{w+1}\right)$ は高々 2 次の多項式である．

証明． $|u_n|\leqq M$, $|b_n|\leqq M$ $(n=0, 1, \cdots)$ とおく．$f(z)$ は $|z|<1$ に対して正則であって，かつ，そこで

$$|f(z)|\leqq\frac{M}{1-|z|}$$

である．いま $w=\xi+i\eta$ とおくと

$$|g(w)|=\left|f\left(\frac{w}{w+1}\right)\right|\leqq\frac{M}{1-\left|\dfrac{w}{w+1}\right|}=\frac{M|w+1|(|w+1|+|w|)}{1+2\xi}$$

であって，$g(w)$ は $\xi>-\dfrac{1}{2}$ に対して正則である．ゆえに，もし $\xi\geqq0$ で，かつ $|w|\geqq1$ であるならば，

$$|g(w)|\leqq2M|w|(2|w|+|w|)=6M|w|^2 \tag{11.2}$$

である．

次に $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ は $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ の E_{-1}-変換であるから，定理 11.6 により大きな $|z|$ に対しては

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{(z-2)^n}$$

なる展開が得られる．ゆえに小さな $|w|$ に対しては

$$g(w)=f\left(\frac{w}{w+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{\left(\dfrac{1}{w}-1\right)^n}$$

である．$|b_n|\leqq M$ なるゆえ，$g(w)$ は $|w|<|1-w|$，すなわち $\xi<\dfrac{1}{2}$ に対して正則である．

以上のことから $g(w)$ は w-平面で整関数である．さらに $\xi<\dfrac{1}{2}$ に対しては

$$|g(w)|\leqq\frac{M|w-1|}{|w-1|-|w|}=\frac{M|w-1|(|w-1|+|w|)}{1-2\xi}$$

である．ゆえに，もし $\xi \leqq 0$ で，かつ $|w| \geqq 1$ であるならば，

$$|g(w)| \leqq 2M|w|(2|w|+|w|)=6M|w|^2 \tag{11.3}$$

である．(11.2) と (11.3) より $|w| \geqq 1$ に対して $|g(w)| \leqq 6M|w|^2$ である．ゆえにリュービルの定理[5] の拡張により $g(w)$ は高々 2 次の多項式である．よって補助定理が証明された．

さて数列 $\{s_n\}$ は，

$$E_1\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s, \qquad E_{-1}\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = t$$

であるとしよう．補助定理より，このときには

$$g(w) = f\left(\frac{w}{w+1}\right) = c_0 + c_1 w + c_2 w^2$$

と書ける． 仮定より $f(z)$ は実軸上を $z \to 1-0$ とするとき有界である．ゆえに $g(w)$ は実軸上を $w \to +\infty$ とするときやはり有界である．よって $c_1 = c_2 = 0$，$u_0 = c_0$，$u_1 = u_2 = \cdots = 0$ である．ゆえに数列 $\{s_n\}$ は定数列 $c_0, c_0, \cdots$ となり，$s = c_0 = t$ である．　(証明終)

§ 12.　ハーディ・リットルウッド・フェケーテ総和法

α を $\alpha \neq 0$，$\alpha \neq 1$ なる複素数とし，行列 $T_\alpha = (a_{n\nu})$ を

$$a_{n\nu} = \begin{cases} 0, & \text{ただし}\quad 0 \leqq \nu < n, \\ (1-\alpha)^{n+1}\dbinom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n}, & \text{ただし}\quad \nu \geqq n \end{cases} \tag{12.1}$$

により定義する．すなわち

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} 1-\alpha & (1-\alpha)\alpha & (1-\alpha)\alpha^2 & (1-\alpha)\alpha^3 & \cdots \\ 0 & (1-\alpha)^2 & (1-\alpha)^2\dbinom{2}{1}\alpha & (1-\alpha)^2\dbinom{3}{1}\alpha^2 & \cdots \\ 0 & 0 & (1-\alpha)^3 & (1-\alpha)^3\dbinom{3}{2}\alpha & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & (1-\alpha)^4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

5) 辻 [2] 129 ページ．

である．このように $a_{n\nu}=0$ $(0\leqq\nu<n)$ なる行列 $A=(a_{n\nu})$ を一般に**上三角行列**という．

この行列 T_α による数列－数列変換で与えられる総和法を**テイラー T_α-総和法**という．与えられた数列 $\{s_n\}$ に対して

$$t_n=T_\alpha(n;\ s_\nu)=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n}s_\nu$$

$$=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_{n+\nu}\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおく．特に $\alpha=0$ に対しては

$$t_n=s_n\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

で普通の収束となり，また $\alpha=1$ に対しては

$$t_n=0\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

となる．以下 $\alpha=0$, $\alpha=1$ の二つの場合は省くことにする．

この T_α-総和法は**ハーディ・リットルウッド**と**フェケーテ**により 1916 年に独立に見いだされた．前二者はこの α の代りに $1-p$ としたものを**円総和法** (circle method of summation) と名付け $(\gamma,\ p)$ と書いた．今日この総和法を**ハーディ・リットルウッド・フェケーテの総和法**ともいう．その後ドイツのワイスが前述のようにテイラー総和法と名付けた．1949 年にマイヤーケーニッヒが，オイラー総和法，T_α-総和法，および次節に述べる S_α-総和法，ボレル総和法の四者の間には極めて密接な関係があることを示し，この四者を一括して Kreisverfahren と名付けた．この Kreisverfahren は英語の circle method of summation のドイツ訳であるが，その使用に際しては，このような違いがある．

行列 $(\gamma,\ p)=T_{1-p}$ と前節で述べたオイラー行列 E_p の間には

$$(\gamma,\ p)=pE_p{}^T$$

なる関係がある．ここで $E_p{}^T$ は行列 E_p の転置行列とする．

シルバーマン・テープリッツの定理から次の定理は容易に導かれる．

定理 12.1. T_α-総和法，ただし $\alpha\neq0$, $\alpha\neq1$, がパーマネントであるための必要十分条件は，α が $0<\alpha<1$ なる実数であることである．

今迄述べた各種の総和法とは違い，行列 T_α の各行は 0 でない要素を無

数に含むから，数列 $\{s_n\}$ が与えられたとき，それが T_α–適用可能であるか否かの問題，すなわち

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n}s_\nu$$

がすべての $n=0, 1, \cdots$ に対して収束するか否かの問題がおこる．これについては次の定理が成り立つ．

定理 12.2. 数列 $\{s_n\}$ が T_α–適用可能であるための必要十分条件は，すべての $n=0, 1, \cdots$ に対して

$$s_\nu=O\left(\frac{1}{\nu^n|\alpha|^\nu}\right) \qquad (\nu\to\infty)$$

なることである．

証明. 必要条件．すべての $n=0, 1, \cdots$ に対して，

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}\alpha^\nu s_\nu \tag{12.2}$$

が収束し，かつ

$$\binom{\nu}{n}\cong\frac{\nu^n}{n!} \qquad (\nu\to\infty)$$

なることから，$\nu^n\alpha^\nu s_\nu$ $(\nu=0, 1, \cdots)$ は有界数列である．

十分条件．ある固定した $m\geqq 2$ に対して

$$\nu^m|\alpha|^\nu|s_\nu|\leqq M \qquad (\nu=0, 1, \cdots)$$

ならば（M は ν に依存しない），任意の固定した n に対して

$$\binom{\nu}{n}|\alpha|^\nu|s_\nu|\leqq\frac{M}{\nu^m}\binom{\nu}{n}\cong\frac{M}{n!}\frac{1}{\nu^{m-n}} \qquad (\nu\to\infty)$$

である．ゆえに級数 (12.2) は $0\leqq n\leqq m-2$ に対して絶対収束する．

（証明終）

このことからわかるように，もし $\{s_n\}$ が T_α–適用可能ならば $\{|s_n|\}$ もまた T_α–適用可能であって，かつ

$$t_n=T_\alpha(n;\ s_\nu)=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n}s_\nu$$

は任意の n に対して絶対収束する．

系. 数列 $\{s_n\}$ が T_α-適用可能であるならば，巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ の収束半径を r とすると $r \geqq |\alpha|$ である.

証明. コーシー・アダマールの定理より

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|s_\nu|} \leqq \frac{1}{|\alpha|}$$

なるゆえ明らかである.

また，逆に，もし $r > |\alpha|$ ならば $\{s_n\}$ は T_α-適用可能であることも同様に証明される.

今迄述べた T_α-総和法は，数列－数列変換によって定義されたが，この総和法を級数－級数変換によって定義するとどのようになるであろうか：すなわち，いま $\{s_n\}$ は T_α-適用可能と仮定し，

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n,$$

$$t_n = T_\alpha(n;\ s_\nu) = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} \alpha^{\nu-n} s_\nu,$$

$$t_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

とおくとき，v_n を u_n によって表したい．まず

$$v_0 = t_0 = (1-\alpha) \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu u_\nu$$

である．次に $n \geqq 1$ に対しては，

$$\begin{aligned}
\frac{v_n}{(1-\alpha)^n} = \frac{t_n - t_{n-1}}{(1-\alpha)^n} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_{n+\nu} \\
&\quad - \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu+1} s_{n+\nu} + s_{n-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{n+\nu-1}{\nu} \alpha^\nu s_{n+\nu-1} \right\} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_{n+\nu} \\
&\quad - \left\{ s_{n-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\binom{n+\nu-1}{\nu-1} + \binom{n+\nu-1}{\nu} \right] \alpha^\nu s_{n+\nu-1} \right\} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_{n+\nu} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_{n+\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu u_{n+\nu}
\end{aligned}$$

であるから，両者をまとめて

$$v_n=(1-\alpha)^n\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu u_{n+\nu}=(1-\alpha)^n\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n}u_\nu$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha)}T_\alpha(n;\ u_\nu)\qquad(n=0,1,\cdots)$$

と書ける．すなわち

$$v_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{n\nu}u_\nu$$

とおくと，

$$(12.3)\qquad c_{n\nu}=\begin{cases}0, & \text{ただし}\quad 0\leqq\nu<n,\\ (1-\alpha)^n\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n}, & \text{ただし}\quad \nu\geqq n\end{cases}$$

となり，先に定義した行列 T_α とこの行列 $C=(c_{n\nu})$ の間には

$$\frac{T_\alpha}{1-\alpha}=C$$

なる簡単な関係がある．

上の計算から明らかなように，任意の α $(\neq 0, 1)$ に対して，もし $\{s_n\}$ が T_α-適用可能ならば $\{u_n\}$ も T_α-適用可能である．この逆はどうであろうか．次の定理はこの問に答える．

定理 12.3. $\alpha\neq 0$ で $|\alpha|<1$ のときは，もし $\{u_n\}$ が T_α-適用可能ならば $\{s_n\}$ も T_α-適用可能である．

証明. 仮定と定理 12.2 により，任意の固定した $n=0, 1, \cdots$ に対して

$$\nu^n|\alpha|^\nu|u_\nu|\leqq M\qquad(\nu=0,1,\cdots)$$

である．今 μ を $\frac{\nu-1}{2}\leqq\mu\leqq\frac{\nu}{2}$ であるような整数とすると，

$$\nu^n|\alpha|^\nu|s_\nu|\leqq\nu^n|\alpha|^\nu|u_0|+M\sum_{\lambda=1}^{\mu}\frac{\nu^n|\alpha|^\nu}{\lambda^n|\alpha|^\lambda}+M\sum_{\lambda=\mu+1}^{\nu}\frac{\nu^n|\alpha|^\nu}{\lambda^n|\alpha|^\lambda}$$

$$\leqq\nu^n|\alpha|^\nu|u_0|+M\nu^n|\alpha|^{\nu-\mu}\sum_{\sigma=0}^{\mu-1}|\alpha|^\sigma+M\left(\frac{\nu}{\mu+1}\right)^n\sum_{\sigma=0}^{\nu-\mu-1}|\alpha|^\sigma$$

$$\leqq\nu^n|\alpha|^\nu|u_0|+\frac{M}{1-|\alpha|}(\nu^n|\alpha|^{\frac{\nu}{2}}+2^n)=O(1)\qquad(\nu\to\infty)$$

である．ゆえに $\{s_n\}$ は T_α-適用可能である．（証明終）

すなわち $\alpha\neq 0$ で $|\alpha|<1$ のときは，$\{s_n\}$ が T_α-適用可能であることと

$\{u_n\}$ が T_α-適用可能であることとは同値である．さらに (12.1) の行列による数列－数列型総和法，すなわち

$$t_n=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n}s_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots),$$

および $\lim_{n\to\infty} t_n$ によって定義される総和法を **(*F*–*F*) T_α–総和法**[1]と名付け，(12.3) の行列による級数－級数型総和法，すなわち

$$v_n=(1-\alpha)^{n}\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n}u_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots),$$

および $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ によって定義される総和法を **(*R*–*R*) T_α–総和法** と名付ける．

今迄の考察から次の定理が成り立つことがわかる．

定理 12.4. $\alpha\neq 0$, $|\alpha|<1$ なる任意の複素数 α に対して (*F*–*F*) T_α–総和法と (*R*–*R*) T_α–総和法とは同値である．

しかし $\alpha\neq 1$, $|\alpha|\geqq 1$ なる α に対しては，もはやこのようにはならない．たとえば $u_0=1$, $u_1=u_2=\cdots=0$ とすると $s_0=s_1=\cdots=1$ である．このような α に対しては (*R*–*R*) T_α–$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=1$ である．しかし $\{s_n\}$ は (*F*–*F*) T_α–適用可能でさえない．このように $\alpha\neq 1$, $|\alpha|\geqq 1$ なる α に対しては，(*F*–*F*) T_α–総和法と (*R*–*R*) T_α–総和法は二つの異なった総和法と考えなければならない．

さて定理 12.1 で述べたように $0<\alpha<1$ なる α に対しては T_α–総和法はパーマネントであるが，数列 $\{z^n\}$ に，このような T_α–総和法 $(0<\alpha<1)$ を適用するとどのようになるであろうか．明らかに $|z|<\dfrac{1}{\alpha}$ に対して $\{z^n\}$ は T_α–適用可能であって

$$t_n=T_\alpha(n;\ z^\nu)=\frac{1-\alpha}{1-\alpha z}w^n,$$

ただし

$$w=\frac{(1-\alpha)z}{1-\alpha z},$$

である．数列 $\{t_n\}$ は $|w|<1$ のとき収束する．したがって $\{z^n\}$ が T_α–総和可能であるような z の範囲は，

---

1) (*F*–*F*) はドイツ語の Folge–Folge, (*R*–*R*) は Reihe–Reihe の略である．

$$\left|z-\frac{\alpha}{2\alpha-1}\right|<\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}, \qquad \text{ただし}\quad 0<\alpha\leqq\frac{1}{3},$$

$$\left|z-\frac{\alpha}{2\alpha-1}\right|<\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}, \quad |z|<\frac{1}{\alpha}, \quad \text{ただし}\quad \frac{1}{3}<\alpha<\frac{1}{2},$$

$$\Re z<1, \quad |z|<2, \qquad \text{ただし}\quad \alpha=\frac{1}{2},$$

$$\left|z-\frac{\alpha}{2\alpha-1}\right|>\frac{1-\alpha}{2\alpha-1}, \quad |z|<\frac{1}{\alpha}, \quad \text{ただし}\quad \frac{1}{2}<\alpha<1$$

である．

次に，ハーディ・リットルウッドにとって T_α-総和法の出発点となった，この総和法の関数論的性質を述べよう．

定理 12.5. $\{u_n\}$ は T_α-適用可能とする．定理 12.2 系より

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu$$

は $|z|<|\alpha|$ に対して正則である．$f(z)$ はさらに $z=\alpha$ において正則と仮定し

$$G(T_\alpha)=\{z \mid |z-\alpha|<|1-\alpha|\}$$

とおく．$(R\text{-}R)\,T_\alpha\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$[2] であるための必要十分条件は，$f(z)$ が領域 $G(T_\alpha)$ の中に解析接続されて，かつ，この解析接続によってできる関数要素 $P(z-\alpha)$ が点 $z=1$ で，すなわち $z-\alpha=1-\alpha$ で値 s に収束することである．

証明. 仮定より巾級数

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu, \qquad \frac{1}{n!}f^{(n)}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}u_{n+\nu}z^\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

はすべて $|z|<|\alpha|$ に対して絶対収束する．もし $f(z)$ が $z=\alpha$ でも正則であるならば，アーベルの定理より

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(\alpha)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}u_{n+\nu}\alpha^\nu=\frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}}T_\alpha(n;\ u_\nu)$$

である．ゆえに

---

2) $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu$ が $z=\alpha$ で正則で，かつ $(R\text{-}R)\,T_\alpha\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ であるとき，$\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ は値 s に**正則 $(R\text{-}R)T_\alpha$-総和可能**であるという．

$$(12.4)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha)^n\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^{\nu}u_{n+\nu}=s$$

は，$f(z)$ の $z=\alpha$ におけるテイラー展開

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(\alpha)(z-\alpha)^n=P(z-\alpha)$$

が $z=1$ において値 s に収束することと同値である．　　　　(証明終)

$f(z)$ が $z=\alpha$ で正則の場合には，$z-\alpha=y$ とおくと関数要素 $P(y)$ は形式的に次のようにして得られる．$\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu$ に $z=\alpha+y$ を代入して，

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu(\alpha+y)^\nu&=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu\sum_{n=0}^{\nu}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n}y^n=\sum_{n=0}^{\infty}y^n\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n}u_\nu\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{(1-\alpha)^{n+1}}T_\alpha(n,\ u_\nu)=P(y).\end{aligned}$$

この最後の級数で $y=1-\alpha$ とおくと $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-\alpha}T_\alpha(n,\ u_\nu)$ となり，$\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ の $(R\text{-}R)\,T_\alpha$-変換 (12.3) が得られる．さらに

$$\frac{y}{1-\alpha}=\frac{z-\alpha}{1-\alpha}=x$$

とおき，$z=\alpha+(1-\alpha)x$ を $\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu$ に代入して x の巾で整頓すると形式的に

$$f(\alpha+(1-\alpha)x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1-\alpha}T_\alpha(n;\ u_\nu)=P((1-\alpha)x)$$

が得られる．ここで $P((1-\alpha)x)=Q(x)$ とおき，$x=1$ を代入すると再び $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ の $(R\text{-}R)\,T_\alpha$-変換 (12.4) が得られる．

もし $z=\alpha$ が $f(z)$ の特異点ならば，級数 (12.4) はやはり形式的に上述のようにつくられた巾級数 $P(y)$ の $y=1-\alpha$ における値となるが，このときには関数要素 $P(y)$ はたとえ正の収束半径をもっていても，$f(z)$ の解析接続ではあり得ない．

異なった次数をもつ二つのパーマネントな T_α-総和法の間の関係をしらべよう．

定理 12.6.　$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$，$\alpha+\beta-\alpha\beta=\gamma$ とおくと $\max(\alpha,\ \beta)<\gamma<1$ であって，行列 T_α，T_β，T_γ の間には次のような関係がある：

$$T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha = T_\gamma.$$

証明. $\mu \geqq n \geqq 0$, $\nu \geqq 0$ に対して

$$\binom{\nu}{\mu}\binom{\mu}{n} = \binom{\nu}{n}\binom{\nu-n}{\mu-n}$$

であるから，行列 $T_\alpha T_\beta$ の (n, ν) 要素は

$$\frac{(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)\beta^\nu}{\alpha^n}\sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{\mu}{n}\binom{\nu}{\mu}\frac{\alpha^\mu(1-\beta)^\mu}{\beta^\mu}$$

$$=\frac{(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)\beta^\nu}{\alpha^n}\binom{\nu}{n}\sum_{\mu=n}^{\infty}\binom{\nu-n}{\mu-n}\frac{\alpha^\mu(1-\beta)^\mu}{\beta^\mu}$$

$$=\frac{(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)^{n+1}\beta^\nu}{\beta^n}\binom{\nu}{n}\sum_{\lambda=0}^{\nu-n}\binom{\nu-n}{\lambda}\frac{\alpha^\lambda(1-\beta)^\lambda}{\beta^\lambda}$$

$$=(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)^{n+1}\binom{\nu}{n}(\alpha+\beta-\alpha\beta)^{\nu-n}$$

$$=(1-\gamma)^{n+1}\binom{\nu}{n}\gamma^{\nu-n}$$

である．この最後の式は行列 T_γ の (n, ν) 要素である． (証明終)

定理 12.7. 行列 $V=(v_{n\nu})$, $W=(w_{n\nu})$ はともに T-行列（テープリッツ行列）であって，かつ

$$v_{n\nu} \geqq 0, \quad w_{n\nu} \geqq 0 \quad (n, \nu = 0, 1, \cdots)$$

とする．もし数列 $\boldsymbol{s}=\{s_n\}$ に対して，$\{|s_n|\}$ が (VW)-適用可能であるか，または $\{|s_n|\}$ が W-適用可能であって，かつ $t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} w_{n\nu}|s_\nu|$ $(n=0, 1, \cdots)$ なる数列 $\{t_n\}$ が V-適用可能であるならば，$(VW)\boldsymbol{s}$, $W\boldsymbol{s}$, $V(W\boldsymbol{s})$ はすべて存在して

$$(VW)\boldsymbol{s} = V(W\boldsymbol{s})$$

である．

証明. V, W が T-行列であるならば，積 VW は存在して，かつ T-行列である（演習問題1問1参照）．定理は絶対収束する二重級数の和に関する定理より明らかである． (証明終)

前二定理より次の定理が得られる．

定理 12.8. もし $0<\beta<\gamma<1$ で $T_\beta\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$, かつ $\{s_n\}$ は T_γ-適用可

能であるならば，$T_\gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$ である．

証明． $\alpha=\dfrac{\gamma-\beta}{1-\beta}$ とおくと $0<\alpha<1$ で，かつ定理 12.6 より $T_\gamma=T_\alpha T_\beta$ である．定理 12.7 より

$$T_\gamma \boldsymbol{s} = T_\alpha (T_\beta \boldsymbol{s}),$$

さらに定理 12.1 より T_α-総和法はパーマネントであることから結論が導かれる．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

T_α-総和法の転移性については次の定理が成り立つ．

定理 12.9.　(F–F) T_α-総和法（ただし $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 1$）は，任意の α に対して左へ転移的である．また右へ転移的であるための必要十分条件は $\Re(\alpha)>1/2$ なることである．

証明．　二つの数列

(12.5)　　　　　　　　$0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots,$[3]

(12.6)　　　　　　　　$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \cdots$

を考える．(12.1) の行列 T_α による両数列の変換をそれぞれ t_n, τ_n とする．すなわち

$$t_0 = (1-\alpha)\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha^\nu s_\nu,$$

$$t_n = (1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_{n+\nu} \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

$$\tau_n = (1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_{n+\nu+1} \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とする．定理 12.2 より数列 (12.5) と (12.6) は，いずれか一方が T_α-適用可能であるならば他方も T_α-適用可能である．すなわち，ともに T_α-適用可能であるか，あるいはともに T_α-適用可能でない．

二つの数列 $\{t_n\}$, $\{\tau_n\}$ の間には，$t_0=\alpha\tau_0$ および

(12.7)　　　　$t_n=(1-\alpha)\tau_{n-1}+\alpha\tau_n \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$

なる関係がある．ゆえにもし $\lim_{n\to\infty}\tau_n=s$ ならば $\lim_{n\to\infty}t_n=s$ である．

次に (12.7) より

3)　数列 $0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots$ が値 s に (F–F) T_α-総和可能であることと，数列 $s_0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots$ が値 s に (F–F) T_α-総和可能であることとは同値である．

$$\tau_n=\frac{\alpha-1}{\alpha}\tau_{n-1}+\frac{1}{\alpha}t_n \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

が得られ，さらに $\tau_0=(1/\alpha)t_0$ とより

$$\tau_n=\frac{1}{\alpha}\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{n-\nu}t_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

が得られる．いま

$$v_{n\nu}=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{n-\nu}, & \text{ただし}\quad 0\leqq\nu\leqq n\\ 0, & \text{ただし}\quad \nu>n\end{cases}$$

とおくと，行列 $V=(v_{n\nu})$ がテープリッツ行列であるための必要十分条件は $|\alpha-1|<|\alpha|$ なることである．ゆえに，もし $\lim_{n\to\infty}t_n=s$ ならば $\lim_{n\to\infty}\tau_n=s$ であるための必要十分条件は $\Re(\alpha)>1/2$ なることである．　　　　(証明終)

§13.　マイヤーケーニッヒ・ヴァーミーズ総和法

α を $\alpha\neq0$，$\alpha\neq1$ なる複素数とし，行列 $S_\alpha=(a_{n\nu})$ を

$$a_{n\nu}=(1-\alpha)^{n+1}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu \qquad (n,\ \nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

により定義する．この行列 S_α による数列－数列変換で与えられる総和法を**ローラン S_α-総和法** あるいは**マイヤーケーニッヒ・ヴァーミーズ総和法** という．

この総和法は 1949 年にマイヤーケーニッヒとヴァーミーズにより独立に見いだされ，研究された．本節の諸定理はマイヤーケーニッヒにより（一部両氏により独立に）得られたものである．行列 S_α は

$$(13.1)\qquad S_\alpha=\begin{pmatrix} 1-\alpha & (1-\alpha)\alpha & (1-\alpha)\alpha^2 & \cdots\\ (1-\alpha)^2 & (1-\alpha)^2\binom{2}{1}\alpha & (1-\alpha)^2\binom{3}{1}\alpha^2 & \cdots\\ (1-\alpha)^3 & (1-\alpha)^3\binom{3}{2}\alpha & (1-\alpha)^3\binom{4}{2}\alpha^2 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

となり，容易にわかるように行列 T_α の各行を 0 がなくなるまで左に平行

移動して得られる行列である．

与えられた数列 $\{s_n\}$ に対して

$$t_n=S_\alpha(n;\ s_\nu)=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと，特に $\alpha=0$ に対しては

$$t_n=s_0 \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

となり，また $\alpha=1$ に対しては

$$t_n=0 \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

となる．T_α-総和法の場合と同様 $\alpha=0$, $\alpha=1$ の二つの場合は省くことにする．

シルバーマン・テープリッツの定理から，次の定理は容易に導かれる．

定理 13.1. S_α-総和法，ただし $\alpha\neq0$, $\alpha\neq1$, がパーマネントであるための必要十分条件は，α が $0<\alpha<1$ なる実数であることである．

T_α-総和法のときと同様に，数列 $\{s_n\}$ が与えられたとき，それが S_α-適用可能であるか否かの問題がおこる．これについては次の定理が成り立つ．

定理 13.2. 数列 $\{s_n\}$ が S_α-適用可能であるための必要十分条件は，すべての $n=0, 1, \cdots$ に対して

$$s_\nu=O\left(\frac{1}{\nu^n|\alpha|^\nu}\right) \qquad (\nu\to\infty)$$

なることである．

証明. $n=0, 1, \cdots$ を任意に固定すると

$$\binom{n+\nu}{\nu}=\binom{\nu+n}{n}\cong\frac{\nu^n}{n!} \qquad (\nu\to\infty)$$

であることに注意すると，定理 12.2 の証明と全く同様にできる．

(証明終)

さらに，もし $\{s_n\}$ が S_α-適用可能であるならば，$\{|s_n|\}$ もまた S_α-適用可能であって，かつ

$$t_n=S_\alpha(n;\ s_\nu)=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_\nu$$

は任意の $n=0, 1, \cdots$ に対して絶対収束する．

系 1. 数列 $\{s_n\}$ が S_α-適用可能であるための必要十分条件は，$\{s_n\}$ が T_α-適用可能なることである．

系 2. 数列 $\{s_n\}$ が S_α-適用可能であるならば，巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ の収束半径を r とすると $r \geqq |\alpha|$ である．

いずれも証明は明らかであろう．

次にこの S_α-総和法を級数－級数変換で与えるとどのようになるであろうか．いま $\{s_n\}$ は S_α-適用可能と仮定し，

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

$$t_n = S_\alpha(n;\ s_\nu) = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_\nu$$

$$t_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

とおいて，v_n を u_n で表したい．まず

$$v_0 = t_0 = (1-\alpha) \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu u_\nu = u_0 + \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^\nu u_{\nu+1}$$

である．次に $n \geqq 1$ に対しては

$$v_n = t_n - t_{n-1} = (1-\alpha)^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_\nu - (1-\alpha)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n-1+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_\nu$$

である．ゆえに

$$\frac{v_n}{(1-\alpha)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \binom{n+\nu}{\nu} - \binom{n-1+\nu}{\nu} \right\} \alpha^\nu s_\nu - \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu s_\nu$$

である．ここで

$$\binom{n+\nu}{\nu} - \binom{n-1+\nu}{\nu} = \begin{cases} 0, & \text{ただし} \quad \nu = 0, \\ \binom{n+\nu-1}{\nu-1}, & \text{ただし} \quad \nu \geqq 1 \end{cases}$$

であるから

$$\frac{v_n}{(1-\alpha)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu+1} s_{\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^{\nu+1} s_\nu$$

$$= \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu}{\nu} \alpha^\nu u_{\nu+1},$$

ゆえに

$$v_n=\alpha(1-\alpha)^n\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu u_{\nu+1}\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

である．よって次の定理が証明された．

定理 13.3.　もし $S_\alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=s$ であるならば，

$$u_0+\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha)^n\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu u_{\nu+1}=s$$

である．

さて上の計算から明らかなように，$\alpha\neq0$，$\alpha\neq1$ なる任意の α に対して，もし $\{s_n\}$ が S_α-適用可能であるならば，$\{u_n\}$ も S_α-適用可能である．定理 12.3 と定理 13.2 系1より，$\alpha\neq0$，$|\alpha|<1$ なる α に対しては，もし $\{u_n\}$ が S_α-適用可能であるならば，$\{s_n\}$ も S_α-適用可能である．$\alpha\neq1$，$|\alpha|\geqq1$ なる α に対しては，もはや，このようにならないことは T_α-総和法のときと同様である．

したがって行列 (13.1) による数列－数列型総和法，すなわち

$$t_n=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_\nu\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots),$$

および $\lim_{n\to\infty} t_n$ によって定義される総和法と，

$$(13.2)\qquad\begin{cases} v_0=u_0+\alpha\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha^\nu u_{\nu+1}, \\ v_n=\alpha(1-\alpha)^n\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu u_{\nu+1}\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)\end{cases}$$

および $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ によって定義される総和法とは二つの異なった総和法と考えなければならない．前者を **(*F*–*F*)S_α–総和法**，後者を **(*R*–*R*)S_α–総和法**と名付けよう．

次の定理は明らかであろう．

定理 13.4.　$\alpha\neq0$，$|\alpha|<1$ なる任意の複素数 α に対して $(F\text{–}F)S_\alpha$–総和法と $(R\text{–}R)S_\alpha$–総和法とは同値である．

すでにオイラー総和法，T_α–総和法に関する転移性について述べたが S_α–総和法についてはどのようになるであろうか．簡単のために $\alpha\neq1$，$|1-\alpha|<1$ のときについて考えよう．二つの数列

(13.3) $0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots,$ [1]

(13.4) $s_1,\ s_2,\ s_3,\ \cdots$

を考える．行列 (13.1) による両数列の変換をそれぞれ t_n, τ_n とする．すなわち $n=0, 1, \cdots$ に対して

$$t_n=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_\nu,$$

$$\tau_n=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_{\nu+1}$$

とする．ここで定理 13.2 より数列 (13.3) と (13.4) は，ともに S_α-適用可能であるか，あるいはともに S_α-適用可能でない．

さらに二つの数列 $\{t_n\}$, $\{\tau_n\}$ の間には，$\tau_0=\dfrac{t_0}{\alpha}$ および

(13.5) $$\tau_n=\frac{1}{\alpha}\{t_n-(1-\alpha)t_{n-1}\} \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

なる関係がある．ゆえに，もし $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=s$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=s$ である．

次に (13.5) より

$$t_n=(1-\alpha)t_{n-1}+\alpha\tau_n \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

さらに $t_0=\alpha\tau_0$ より

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{n}\alpha(1-\alpha)^{n-\nu}\tau_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．いま

$$w_{n\nu}=\begin{cases}\alpha(1-\alpha)^{n-\nu}, & \text{ただし}\quad 0\leqq\nu\leqq n,\\ 0, & \text{ただし}\quad \nu>n\end{cases}$$

とおくと，行列 $W=(w_{n\nu})$ は $\alpha\neq1$, $|1-\alpha|<1$ のときテープリッツ行列である．

ゆえに $\alpha\neq1$, $|1-\alpha|<1$ のときには，もし $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=s$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=s$ である．

以上のことをまとめると次のようになる．

定理 13.5. $(F\text{-}F)S_\alpha$-総和法は $\alpha\neq1$, $|1-\alpha|<1$ なる任意の α に対して転移的である．

---

1) $|1-\alpha|<1$ のときには，数列 $0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots$ が値 s に $(F\text{-}F)S_\alpha$-総和可能であることと，数列 $s_0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots$ が値 s に $(F\text{-}F)S_\alpha$-総和可能であることとは同値である．

この定理と定理 13.4 とから次の定理が得られる．

定理 13.6.　$|\alpha|<1$，$|1-\alpha|<1$ なる任意の α に対しては，$(F\text{-}F)S_\alpha$-$\lim_{n\to\infty} s_n=s$ と

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha)^n\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu u_\nu=\frac{\alpha}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}S_\alpha(n;\ u_\nu)=s$$

とは同値である．

次に数列 $\{z^n\}$ に S_α-総和法（ただし $0<\alpha<1$）を適用してみよう．

$$t_n=S_\alpha(n;\ z^\nu)=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu z^\nu$$

$$=\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha z}\right)^{n+1},$$

ただし $|z|<\frac{1}{\alpha}$，であるから，$\{z^n\}$ が S_α-総和可能であるような z の範囲は

$$\left|z-\frac{1}{\alpha}\right|>\frac{1-\alpha}{\alpha},\qquad |z|<\frac{1}{\alpha}$$

である[2]．

異なった次数をもつ二つのパーマネントな S_α-総和法の間の関係をしらべよう．

定理 13.7.　$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$，$\dfrac{\beta}{1-\alpha(1-\beta)}=\gamma$　とおくと，$\beta<\gamma<1$ であって，行列 T_α，S_β，S_γ の間には次のような関係がある：

$$T_\alpha S_\beta=S_\gamma.$$

証明.　n，ν，$\mu\geqq 0$ に対して，

$$\binom{\mu+\nu}{\nu}\binom{\mu}{n}=\binom{\mu+\nu}{\nu+n}\binom{\nu+n}{n}$$

であるから，行列 $T_\alpha S_\beta$ の $(n,\ \nu)$ 要素は

$$\frac{(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)\beta^\nu}{\alpha^n}\sum_{\mu=n}^{\infty}\binom{\mu}{n}\binom{\mu+\nu}{\nu}\alpha^\mu(1-\beta)^\mu$$

$$=\binom{n+\nu}{\nu}\frac{(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)\beta^\nu}{\alpha^n}\sum_{\mu=n}^{\infty}\binom{\mu+\nu}{\nu+n}\alpha^\mu(1-\beta)^\mu$$

---

2)　T_α-総和法のときと比較せよ．

$$=\binom{n+\nu}{\nu}(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)^{n+1}\beta^{\nu}\sum_{\eta=0}^{\infty}\binom{n+\nu+\eta}{\eta}\alpha^{\eta}(1-\beta)^{\eta}$$

$$=\binom{n+\nu}{\nu}\frac{(1-\alpha)^{n+1}(1-\beta)^{n+1}\beta^{\nu}}{(1-\alpha+\alpha\beta)^{n+\nu+1}}$$

$$=\binom{n+\nu}{\nu}(1-\gamma)^{n+1}\gamma^{\nu}$$

である．この最後の式は行列 S_γ の (n, ν) 要素である． (証明終)

定理 13.8. もし $0<\beta<\gamma<1$ で $S_\beta\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=s$，かつ $\{s_n\}$ は S_γ–適用可能であるならば，$S_\gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=s$ である．

証明. $\alpha=\dfrac{\gamma-\beta}{\gamma(1-\beta)}$ とおくと $0<\alpha<1$ で，かつ前定理より $S_\gamma=T_\alpha S_\beta$ である．定理 12.7 より

$$S_\gamma \boldsymbol{s}=T_\alpha(S_\beta \boldsymbol{s}),$$

さらに定理 12.1 より T_α–総和法がパーマネントであることから結論が導かれる． (証明終)

この定理は T_α–総和法に関する定理 12.8 に対応する．次に $0<\alpha<1$ なる同一の次数 α をもつ T_α–総和法と S_α–総和法の間の関係をしらべよう．

定理 13.9. $\alpha\neq 0$，$\alpha\neq 1$ なる任意の α に対して，行列 E_α，T_α，S_α の間には次のような関係がある:

$$E_\alpha T_\alpha=S_\alpha.$$

証明. 行列 $E_\alpha T_\alpha$ の (n, ν) 要素は

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{n}{\mu}\alpha^{\mu}(1-\alpha)^{n-\mu}(1-\alpha)^{\mu+1}\binom{\nu}{\mu}\alpha^{\nu-\mu}$$

$$=(1-\alpha)^{n+1}\alpha^{\nu}\sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{n}{\mu}\binom{\nu}{\mu}$$

$$=(1-\alpha)^{n+1}\alpha^{\nu}\binom{n+\nu}{\nu}$$

である．この最後の式は行列 S_α の (n, ν) 要素である．

定理 13.10. もし $0<\alpha<1$ ならば $T_\alpha\subseteqq S_\alpha$ である．

証明. もし $T_\alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=s$ ならば，定理 13.2 系1 より $\{s_n\}$ は S_α–適用

可能である．前定理，定理 12.7，定理 11.1 より $S_\alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$ である．
(証明終)

定理 13.11.　$\alpha\neq 0$，$\alpha\neq 1$，$\beta=2-\dfrac{1}{\alpha}$，$\beta\neq 0$，$\beta\neq 1$，$|\alpha(1-\beta)|<1$ なる任意の α，β に対して，行列 S_α，E_β，S_β の間には次のような関係がある:

$$S_\alpha E_\beta = S_\beta.$$

証明.　n, ν, $\mu\geqq 0$ に対して

$$\binom{n+\mu}{\mu}\binom{\mu}{\nu}=\binom{\mu+n}{n+\nu}\binom{n+\nu}{\nu}$$

であるから，行列 $S_\alpha E_\beta$ の $(n,\ \nu)$ 要素は

$$\begin{aligned}
&(1-\alpha)^{n+1}\beta^\nu\sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{n+\mu}{\mu}\binom{\mu}{\nu}\alpha^\mu(1-\beta)^{\mu-\nu}\\
&=(1-\alpha)^{n+1}\beta^\nu\binom{n+\nu}{\nu}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\binom{\mu+n}{n+\nu}\alpha^\mu(1-\beta)^{\mu-\nu}\\
&=(1-\alpha)^{n+1}\alpha^\nu\beta^\nu\binom{n+\nu}{\nu}\sum_{\eta=0}^{\infty}\binom{n+\nu+\eta}{\eta}\alpha^\eta(1-\beta)^\eta\\
&=(1-\alpha)^{n+1}\alpha^\nu\beta^\nu\binom{n+\nu}{\nu}\{1-\alpha(1-\beta)\}^{-n-\nu-1}\\
&=(1-\beta)^{n+1}\binom{n+\nu}{\nu}\beta^\nu
\end{aligned}$$

である．この最後の式は行列 S_β の $(n,\ \nu)$ 要素である．　(証明終)

この定理を使い，α が $0<\alpha<1$ なる実数であるとき，E_β–総和法と S_β–総和法の間の比較定理が得られる．

次に S_α–総和法の関数論的性質を述べよう．次に述べる定理は T_α–総和法における定理 12.5 に対応する．

定理 13.12.　$\{u_n\}$ は S_α–適用可能とする．すると定理 13.2 系2より

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu$$

は $|z|<|\alpha|$ に対して正則である．$f(z)$ はさらに $z=\alpha$ において正則であると仮定する[3)]．$(R\text{-}R)S_\alpha\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ であるための必要十分条件は，$f\left(\dfrac{1}{z}\right)$を

---

3)　$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu$ が $z=\alpha$ で正則で，かつ　$(R\text{-}R)S_\alpha\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$　であるとき，$\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ は値 s に**正則 $(R\text{-}R)S_\alpha$–総和可能**であるという．

$z-\dfrac{1}{\alpha}$ の巾で展開して得られる級数が $z=1$ で値 s に収束することである.

証明.

(13.6) $$g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)=u_0+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u_{\nu+1}}{z^{\nu+1}}, \quad \text{ただし} \quad |z|>\frac{1}{|\alpha|},$$

とおくと, $g(z)$ は $z=\dfrac{1}{\alpha}$ で正則であることから, この点の近傍で

(13.7) $$f\left(\frac{1}{z}\right)=g\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}g^{(n)}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)^n$$

である. ここで $n=1, 2, \cdots$ に対して

$$\frac{1}{n!}g^{(n)}(z)=(-1)^n\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\frac{u_{\nu+1}}{z^{\nu+n+1}}, \qquad |z|>\frac{1}{|\alpha|},$$

である. 仮定より, アーベルの定理を用いて

$$\frac{1}{n!}g^{(n)}\left(\frac{1}{\alpha}\right)=(-1)^n\alpha^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^{\nu}u_{\nu+1}, \qquad n=0, 1, \cdots,$$

である. また (13.6) より

$$g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=u_0+\alpha\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha^{\nu}u_{\nu+1}$$

である. ゆえに (13.7) より $z=\dfrac{1}{\alpha}$ の近傍で次の展開が得られる:

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=u_0+\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha^n\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)^n\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^{\nu}u_{\nu+1}.$$

(証明終)

§14. クアジハウスドルフ総和法

すでに §10 で述べたように, 行列 $D=(d_{n\nu})$:

$$d_{n\nu}=\begin{cases}(-1)^{\nu}\dbinom{n}{\nu}, & \text{ただし} \quad 0\leqq\nu\leqq n,\\ 0, & \text{ただし} \quad \nu>n\end{cases}$$

と, 与えられた実数列 $\{\mu_n\}$ によりつくられる行列 $M=(m_{n\nu})$

$$m_{n\nu}=\begin{cases}\mu_n, & \text{ただし} \quad n=\nu,\\ 0, & \text{ただし} \quad n\neq\nu\end{cases}$$

とから行列の積 $DMD=A=(a_{n\nu})$ をつくり, 行列 A による数列－数列変換で定義される総和法をハウスドルフ総和法 (H, μ_n) と名付けた. 本節で

は，まずこの行列 A の転置行列 $C=A^{\mathrm{T}}=D^{\mathrm{T}}MD^{\mathrm{T}}$，$C=(c_{n\nu})$:

$$c_{n\nu}=\begin{cases}0, & \text{ただし}\quad 0\leqq\nu<n,\\ \dbinom{\nu}{n}\Delta^{\nu-n}\mu_n, & \text{ただし}\quad \nu\geqq n\end{cases}\tag{14.1}$$

による級数-級数型総和法を考えよう[1]．この総和法を**級数-級数型クアジハウスドルフ総和法** **(H^*, μ_n)** または簡単に **(R-R)(H^*, μ_n)-総和法**という．

定理 14.1.　実数列 $\{\mu_n\}$ に対する級数-級数型クアジハウスドルフ総和法 (H^*, μ_n) がパーマネントであるための必要十分条件は，

(i)　$\{\mu_n\}$ がモーメント数列で，

(ii)　$\mu_0=1$

なることである．

証明.　定理 4.5 により

$$b_{n\nu}=c_{0\nu}+c_{1\nu}+\cdots+c_{n\nu}\qquad (n,\ \nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
b_{n\nu}-b_{n,\nu+1}&=\sum_{m=0}^{n}(c_{m\nu}-c_{m,\nu+1})\\
&=\sum_{m=0}^{n}\left\{\binom{\nu}{m}\Delta^{\nu-m}\mu_m-\binom{\nu+1}{m}\Delta^{\nu+1-m}\mu_m\right\}\\
&=\sum_{m=0}^{n}\left\{\binom{\nu}{m}\Delta^{\nu-m}\mu_m-\binom{\nu}{m}\Delta^{\nu+1-m}\mu_m-\binom{\nu}{m-1}\Delta^{\nu+1-m}\mu_m\right\}\\
&=\sum_{m=0}^{n}\left\{\binom{\nu}{m}\Delta^{\nu-m}\mu_m-\left[\binom{\nu}{m}\Delta^{\nu-m}\mu_m-\binom{\nu}{m}\Delta^{\nu-m}\mu_{m+1}\right]\right.\\
&\qquad\left.-\binom{\nu}{m-1}\Delta^{\nu+1-m}\mu_m\right\}\\
&=\sum_{m=0}^{n}\left\{\binom{\nu}{m}\Delta^{\nu-m}\mu_{m+1}-\binom{\nu}{m-1}\Delta^{\nu-(m-1)}\mu_m\right\}\\
&=\binom{\nu}{n}\Delta^{\nu-n}\mu_{n+1}
\end{aligned}$$

である．よって定理 9.18 より

1)　ハーディ [10] ではこの行列 C による数列-数列型総和法が考えられた．本節の諸定理はラマヌジャンによる．

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|b_{n\nu}-b_{n,\nu+1}|\leqq M \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であることは，数列 $\{\mu_n\}$ がモーメント数列であることと同値である．

次に

$$b_{n+p,n}=b_{nn} \qquad (p=0,\ 1,\ \cdots),$$

$$b_{nn}=\sum_{m=0}^{n}c_{mn}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\varDelta^{n-m}\mu_m=\mu_0 \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

に注意すると，

$$\lim_{n\to\infty}b_{n\nu}=1 \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

は $\mu_0=1$ と同値である． （証明終）

この定理から明らかなように，パーマネントな級数－級数型クアジハウスドルフ総和法は

$$c_{n\nu}=\begin{cases}0, & \text{ただし}\quad 0\leqq\nu<n,\\ \displaystyle\binom{\nu}{n}\int_0^1 x^n(1-x)^{\nu-n}d\phi(x), & \text{ただし}\quad \nu\geqq n\end{cases}$$

なる行列 $C=(c_{n\nu})$ により与えられる．ここで $\phi(x)$ は $[0,1]$ で有界変動で，かつ

$$\int_0^1 d\phi(x)=\phi(1)-\phi(0)=1$$

なる関数である．

いま α を $0<\alpha<1$ なる実数とし，$\phi(x)$ を特に

$$\phi(x)=\begin{cases}0, & \text{ただし}\quad 0\leqq x<1-\alpha,\\ 1, & \text{ただし}\quad 1-\alpha\leqq x\leqq 1\end{cases}$$

とすると，この総和法は $(R\text{-}R)\,T_\alpha$-総和法となる．

定理 14.1 の証明からわかったように，(14.1) で与えられる行列 $C=(c_{n\nu})$ から

$$b_{n\nu}=c_{0\nu}+c_{1\nu}+\cdots+c_{n\nu} \qquad (n,\ \nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおき，さらに

$$a_{n\nu}=b_{n\nu}-b_{n,\nu+1}=\binom{\nu}{n}\varDelta^{\nu-n}\mu_{n+1} \qquad (n,\ \nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

なる行列 $A=(a_{n\nu})$ をつくる．

与えられた級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ に対して

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと，形式的に

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu}u_\nu &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu}(s_\nu - s_{\nu-1})\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(c_{n\nu}-c_{n,\nu+1})s_\nu\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\{(b_{n\nu}-b_{n-1,\nu})-(b_{n,\nu+1}-b_{n-1,\nu+1})\}s_\nu\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_{n\nu}-a_{n-1,\nu})s_\nu\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(t_n - t_{n-1})\\ &= \lim_{n\to\infty} t_n\end{aligned}$$

となる．したがって級数－級数型総和法 $(H^*,\ \mu_n)$ には数列－数列型総和法[2] $(H^*,\ \mu_{n+1}) = A = (a_{n\nu})$，ここで

(14.2)
$$a_{n\nu} = \begin{cases} 0, & \text{ただし}\quad 0 \leqq \nu < n,\\ \dbinom{\nu}{n}\Delta^{\nu-n}\mu_{n+1}, & \text{ただし}\quad \nu \geqq n, \end{cases}$$

が対応する．もちろんこの両総和法が同値というわけではない．

定理 14.2.　数列－数列型クアジハウスドルフ総和法 $(H^*,\ \mu_{n+1})$ がパーマネントであるための必要十分条件は，

（i）$\{\mu_n\}$ がモーメント数列であること，すなわち $[0,\ 1]$ で有界変動な関数 $\psi(x)$ により

$$\mu_n = \int_0^1 x^n d\psi(x) \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

と表され，

（ii）
$$\int_{+0}^1 d\psi(x) = \psi(1) - \psi(+0) = 1$$

なることである．

証明.　シルバーマン・テープリッツの定理（定理 2.1）において

2)　簡単に $(\boldsymbol{F}\text{–}\boldsymbol{F})(\boldsymbol{H}^*,\ \boldsymbol{\mu}_{n+1})$–**総和法**という．

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|=\sum_{\nu=n}^{\infty}\left|\binom{\nu}{n}\Delta^{\nu-n}\mu_{n+1}\right|\leqq\xi \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

は，定理 9.18 により $\{\mu_n\}$ がモーメント数列であることと同値である.

$$\lim_{n\to\infty}a_{n\nu}=0 \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

は明らか.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}=\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}\Delta^{\nu-n}\mu_{n+1}$$
$$=\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu}{n}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{\nu-n}d\psi(x)$$
$$=\int_{+0}^1 d\psi(x)$$

より（ii）がでる.　(証明終)

この総和法が特別の場合として $(F\text{-}F)\,T_\alpha$-総和法となることは明らかであろう.

(14.2) で定義される行列 $(a_{n\nu})=A=(H^*,\ \mu_{n+1})$ の各行を 0 がなくなるまで左に平行移動して得られる行列を $(S^*,\ \mu_{n+1})=(a^*_{n\nu})$ とおく，すなわち

$$a^*_{n\nu}=\binom{\nu+n}{\nu}\Delta^{\nu}\mu_{n+1} \qquad (n,\ \nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

とする．この行列により定義される**数列－数列型総和法** $(\boldsymbol{S^*},\ \boldsymbol{\mu_{n+1}})$ を考える[3)]．前定理と同様に次の定理が得られる.

定理 14.3. 数列－数列型総和法 $(S^*,\ \mu_{n+1})$ がパーマネントであるための必要十分条件は，

（i） $\{\mu_n\}$ がモーメント数列であること，すなわち $[0,1]$ で有界変動な関数 $\psi(x)$ により

$$\mu_n=\int_0^1 x^n d\psi(x) \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

と表され，

（ii） $\int_{+0}^1 d\psi(x)=\psi(1)-\psi(+0)=1,$

（iii） $\psi(x)$ は $x=1$ で連続

3) 簡単に $(F\text{-}F)(S^*,\ \mu_{n+1})$-**総和法**という.

なることである．

証明は読者に任せよう（M. S. Ramanujan (b)，Theorem 12 参照）．

§15.　アーベル型総和法

アーベル総和法の出発点となっている有名なアーベルの定理から述べよう．

定理 15.1.　巾級数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$ の収束半径が 1 で，かつ級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ が値 s に収束するならば

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=s.$$

証明.　$\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ が収束するゆえ，任意の $\varepsilon>0$ に対して n を十分大きくとれば，

$$\sigma_m=\sum_{\nu=n}^{n+m}u_\nu,\qquad |\sigma_m|<\varepsilon\qquad (m=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．$0\leqq x\leqq 1$ なる x に対しては $x^n\geqq x^{n+1}$ なるゆえ，アーベルの変換を使い

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\nu=n}^{n+m}u_\nu x^\nu\right|&=|\sigma_0x^n+(\sigma_1-\sigma_0)x^{n+1}+\cdots+(\sigma_m-\sigma_{m-1})x^{n+m}|\\&=|\sigma_0(x^n-x^{n+1})+\cdots+\sigma_{m-1}(x^{n+m-1}-x^{n+m})+\sigma_mx^{n+m}|\\&\leqq\varepsilon x^n\leqq\varepsilon\end{aligned}$$

である．ゆえに $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$ は $0\leqq x\leqq 1$ において一様収束する．したがって $f(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で連続で，$\lim_{x\to 1-0}f(x)=f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ である．

（証明終）

この定理は次のシュトルツの形に一般化される．円周上の点Pを通る半径と，角度 φ_0 $\left(0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}\right)$ をなす直線 PA，PB をひくとき，この二直線で囲まれた角領域 APB のことを，P を頂点とし，開きが $2\varphi_0$ の**シュトルツの角領域**という．

定理 15.2.　巾級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n$ の収束半径を $r>0$ とする．もし収束円上の一点 z_0 で

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_nz_0{}^n$$

が値 s に収束するならば，z_0 を頂点とし，その開きが π より小さい任意の

シュトルツの角領域の中から z が z_0 に近づくとき，一様に $f(z)\to s$ である．

この定理の証明については，たとえば辻 [2] 101 ページ以後を参照されたい．

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が与えられたとき，もし

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

が $0\leqq x<1$ で収束して[1)]，かつ $\lim_{x\to 1-0} f(x)=s$ のとき，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ は値 s に**アーベル総和可能**といい $A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} u_n=s$ と書く．

$$s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと，

$$f(x)=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n=\frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n}{\dfrac{1}{1-x}} \qquad (0\leqq x<1)$$

となり，さらに

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots \qquad (0\leqq x<1)$$

であることに注目すると，アーベル総和法は次のように一般化される．

$$p_n\geqq 0, \qquad \sum_{\nu=n}^{\infty} p_\nu>0 \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

なる数列 $\{p_n\}$ があらかじめ与えられている．さらに

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

の収束半径は $r>0$ とする．ここで $r=\infty$ でもよい．

数列 $\{s_n\}$ が与えられたとき

$$p_s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n$$

とおく．もし $\sum_{n=0}^{\infty} s_n p_n x^n$ が $0\leqq x<r$ で収束して，かつ

1) したがって $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ は $|x|<1$ なるすべての実数および複素数の x に対して収束する．

$$\lim_{x\to r-0}\frac{p_s(x)}{p(x)}=s \qquad \left(r=\infty \text{ のときは } \lim_{x\to\infty}\frac{p_s(x)}{p(x)}=s\right)$$

であるならば，$\{s_n\}$ は値 s に $(J,\ p_n)$**–総和可能**という．

いま $k>-1$ なる任意の実数 k に対して

$$p(x)=\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^n \qquad (0\leqq x<1)$$

として得られる総和法を A_k**–総和法**という．特に A_0–総和法はアーベル総和法である．

$$p(x)=\frac{1}{x}\log\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} \qquad (0\leqq x<1)$$

として得られる総和法を L**–総和法**，または**対数総和法**（L）という．

$$p(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (0\leqq x<\infty)$$

として得られる総和法を**ボレル総和法**（B）という．

これらの総和法については次の定理が成り立つ．

定理 15.3.（i）もし $0<r<\infty$ ならば，$(J,\ p_n)$–総和法がパーマネントであるための必要十分条件は

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_nr^n=\infty$$

なることである．

（ii）もし $r=\infty$ ならば，$(J,\ p_n)$–総和法はパーマネントである．

証明.[2]（i）$p_n\geqq 0$ なるゆえ

$$\sum_{n=0}^{m}p_nr^n\leqq\lim_{x\to r-0}p(x)\leqq\sum_{n=0}^{\infty}p_nr^n,$$

したがって

$$\lim_{x\to r-0}p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nr^n.$$

必要条件．もし $(J,\ p_n)$–総和法がパーマネントであるならば，$p_m>0$ なる m をとり，数列 $\{s_n\}$ を次のように定義する:

$$s_n=\begin{cases}0, & \text{ただし}\quad n\neq m,\\ 1/p_m, & \text{ただし}\quad n=m.\end{cases}$$

2）定理 2.7 により証明することもできる．

明らかに $\lim_{n\to\infty} s_n=0$ で，かつ

$$\frac{p_s(x)}{p(x)}=\frac{x^m}{p(x)}$$

である．仮定より

$$\lim_{x\to r-0}\frac{p_s(x)}{p(x)}=\lim_{x\to r-0}\frac{x^m}{p(x)}=0$$

でなければならないから，

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n r^n=\lim_{x\to r-0} p(x)=\infty$$

となる．

十分条件．$\{s_n\}$ は $\lim_{n\to\infty} s_n=0$ なる任意の数列とし，m は任意の正の整数とする．仮定より $\lim_{x\to r-0} p(x)=\infty$ なるゆえ，

$$\varlimsup_{x\to r-0}\left|\frac{p_s(x)}{p(x)}\right|\leqq\varlimsup_{x\to r-0}\frac{1}{p(x)}\sum_{n=m}^{\infty} p_n|s_n|x^n\leqq\sup_{n\geqq m}|s_n|$$

であって，かつ $\sup_{n\geqq m}|s_n|$ は $m\to\infty$ のとき 0 に近づくから

$$\lim_{x\to r-0}\frac{p_s(x)}{p(x)}=0$$

である．ゆえに $(J, p_n)\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=0$ である．

次に $\{s_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} s_n=s\neq 0$ なる数列のときには，

$$s_n=s+(s_n-s)=s+s_n', \qquad \lim_{n\to\infty} s_n'=0$$

とおくと，

$$\frac{p_s(x)}{p(x)}=\frac{sp(x)+p_{s'}(x)}{p(x)}, \qquad \lim_{x\to r-0}\frac{p_{s'}(x)}{p(x)}=0$$

より

$$\lim_{x\to r-0}\frac{p_s(x)}{p(x)}=s,$$

すなわち $(J, p_n)\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=s$ である．

(ii) $\{s_n\}$ は $\lim_{n\to\infty} s_n=0$ なる数列とする．m を任意の正の整数とし，k を $k>m$ で，かつ $p_k>0$ なる最小の整数とすると，

$$\varlimsup_{x\to\infty}\left|\frac{p_s(x)}{p(x)}\right|\leqq\varlimsup_{x\to\infty}\frac{x^m}{p_k x^k}\sum_{n=0}^{m} p_n|s_n|+\sup_{n\geqq m}|s_n|=\sup_{n\geqq m}|s_n|$$

であって，かつ $\sup_{n \geqq m}|s_n|$ は $m \to \infty$ のとき 0 に近づくから，

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p_s(x)}{p(x)} = 0,$$

すなわち $(J,\ p_n)$-$\lim s_n = 0$ である．

$\{s_n\}$ が一般の収束列のときも（i）と同様にして，$\{s_n\}$ はその極限値と同じ値に $(J,\ p_n)$-総和可能であることが示される．　　　　（証明終）

系． A_k-総和法 $(k > -1)$，L-総和法，B-総和法はすべてパーマネントである．

アーベル総和法の別な方向への一般化も考えられる．数列

$$0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \qquad \lambda_n \to \infty$$

が与えられているとする．もし

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n e^{-\lambda_n x}$$

が $x > 0$ なるすべての x に対して収束して，かつ

$$\lim_{x \to +0} f(x) = s$$

であるとき，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ は値 s に $(A,\ \lambda_n)$-**総和可能**であるという．この総和法がパーマネントであることは定理 4.4 より明らかであろう．$(A,\ n)$-総和法はアーベル総和法である．

次に異なる k に対する A_k-総和法の強弱をしらべよう．

定理 15.4.（ブーアワインの定理） もし $-1 < k' < k$ ならば，$A_k \subseteqq A_{k'}$ である．

証明． まず次の式を証明しよう：　もし $-1 < k' < k$，$y > 0$ とすると，$n = 0, 1, \cdots$ に対して

$$\begin{aligned}(15.1)\qquad & \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k'+1)\Gamma(k-k')}\binom{n+k}{k} y^{-k} \\ & \times \int_0^y (y-t)^{k-k'-1} t^{k'+n} (1+t)^{-k-1-n} dt \\ & = \binom{n+k'}{k'} (1+y)^{-k'-1} \left(\frac{y}{1+y}\right)^n.\end{aligned}$$

である．何となれば

$$u=\frac{t}{1+t},\qquad x=\frac{y}{1+y}\quad \text{とすると,}$$

$$\int_0^y (y-t)^{k-k'-1}t^{k'+n}(1+t)^{-k-1-n}dt$$
$$=(1-x)^{1-k+k'}\int_0^x (x-u)^{k-k'-1}u^{k'+n}du$$
$$=x^{k+n}(1-x)^{1-k+k'}\frac{\Gamma(k-k')\Gamma(k'+1+n)}{\Gamma(k+1+n)}$$

であるから明らかである.

いま

$$(1-x)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}s_n x^n$$

の x の代りに $\frac{y}{1+y}$ を代入して得られる式を $\sigma_k(y)$ とおく. すなわち

$$\sigma_k(y)=(1+y)^{-k-1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}s_n\left(\frac{y}{1+y}\right)^n$$

とおく. (15.1) より次のことを証明しよう.

補助定理 15.5. もし $-1<k'<k$ で, かつ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}s_n\left(\frac{t}{1+t}\right)^n$$

がすべての $t>0$ に対して収束するならば, $y>0$ に対して

$$\sigma_{k'}(y)=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k'+1)\Gamma(k-k')}y^{-k}\int_0^y (y-t)^{k-k'-1}t^{k'}\sigma_k(t)dt, \tag{15.2}$$

$$\varlimsup_{y\to\infty}|\sigma_{k'}(y)|\leqq\varlimsup_{y\to\infty}|\sigma_k(y)| \tag{15.3}$$

である.

証明. もし

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+l}{l}s_n\left(\frac{t}{1+t}\right)^n$$

がある $l=k>-1$ と, すべての $t>0$ に対して収束するならば, それはすべての $l>-1$ と, すべての $t>0$ に対して絶対収束する. (15.1) より

$$\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k'+1)\Gamma(k-k')}y^{-k}$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^y (y-t)^{k-k'-1} t^{k'} (1+t)^{-k-1} \binom{n+k}{k} s_n \left(\frac{t}{1+t}\right)^n dt$$

$$=(1+y)^{-k'-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k'}{k'} s_n \left(\frac{y}{1+y}\right)^n$$

であるから，項別積分により (15.2) が証明される．

(15.3) を証明するには $0<k-k'<1$ と仮定してよい．いま $0<w<y$ とすると，(15.2) より

$$|\sigma_{k'}(y)| \leqq \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k'+1)\Gamma(k-k')} y(y-w)^{-k'-2} \times \int_0^w t^{k'} |\sigma_k(t)| dt + \sup_{t \geqq w} |\sigma_k(t)|$$

であるから

$$\varlimsup_{y\to\infty} |\sigma_{k'}(y)| \leqq \sup_{t \geqq w} |\sigma_k(t)|$$

となり (15.3) が成り立つ．　　　　　　　　　（補助定理 15.5 の証明終）

前補助定理の (15.3) より，もし $-1<k'<k$ で $\lim_{y\to\infty} \sigma_k(y)=0$ ならば

$$\lim_{y\to\infty} \sigma_{k'}(y)=0$$

である．また

$$(1+y)^{-k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \left(\frac{y}{1+y}\right)^n = 1$$

であるから，一般の s に対しても，もし $\lim_{y\to\infty} \sigma_k(y)=s$ ならば

$$\lim_{y\to\infty} \sigma_{k'}(y)=s.$$

（定理 15.4 の証明終）[3)]

もしモーメント数列の概念を使うならば，もっと一般に二つの総和法 (J, p_n)，(J, q_n) の比較定理が得られる．

$$p_n \geqq 0, \quad q_n \geqq 0, \quad \sum_{\nu=n}^{\infty} p_\nu > 0, \quad \sum_{\nu=n}^{\infty} q_\nu > 0 \quad (n=0, 1, \cdots)$$

なる二つの数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ が与えられ，

---

3)　$k>-1$ に対し，$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} s_n x^n = (1-x)^{-k-1} \sin \frac{1}{1-x}$ $(0 \leqq x < 1)$ で定義される数列 $\{s_n\}$ は，A_k-総和可能でないが，$k>k'>-1$ なる任意の k' に対し $A_{k'}$-総和可能である．

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n, \qquad q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n$$

の収束半径をそれぞれ $r_p>0$, $r_q>0$ とする．

定理 15.6. **(ブーアワインの定理)** もし $0<\delta\leqq 1$ なるある δ に対し

$$(15.4) \qquad p_n=q_n\int_0^1 t^n d\psi(t)\geqq \delta q_n\int_0^1 t^n|d\psi(t)| \qquad (n=N,\ N+1,\ \cdots)$$

であるような，[0, 1] で有界変動な実数値関数 $\psi(t)$ が存在し，$r_p=r_q$ かつ $(J,\ p_n)$ はパーマネントな総和法であるならば，$(J,\ q_n)\subseteqq(J,\ p_n)$ である．

証明． 定理 15.3 より，もし

$$p_n=p_n' \qquad (n=N,\ N+1,\ \cdots)$$

で，かつ $(J,\ p_n)$ がパーマネントな総和法であるならば $(J,\ p_n)\cong(J,\ p_n')$ である．ゆえに (15.4) で $N=0$ としても一般性を失わない．

$r=r_p=r_q$ とおき，$\{s_n\}$ は $\sum_{n=0}^{\infty}q_ns_nw^n$ が $|w|<r$ で収束するような任意の数列とする．$0<x<r$ とすると (15.4) より

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_ns_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}q_ns_nx^n\int_0^1 t^n d\psi(t)=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}q_ns_n(xt)^n d\psi(t)$$

となる．ここで項別積分が可能であることは，

$$\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}q_n|s_n|(xt)^n|d\psi(t)|\leqq\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}q_n|s_n|x^n|d\psi(t)|<\infty$$

よりわかる．ゆえに

$$\frac{p_s(x)}{p(x)}=\frac{1}{p(x)}\int_0^1 q_s(xt)d\psi(t)$$

となる．同様に (15.4) の不等式より

$$p(x)\geqq\delta\int_0^1 q(xt)|d\psi(t)|.$$

$(J,\ p_n)$ はパーマネントな総和法ゆえ定理 15.3 より

$$\lim_{x\to r-0}p(x)=\infty.$$

上の三つの式より，$0<w<x<r$ に対して

$$\varlimsup_{x\to r-0}\left|\frac{p_s(x)}{p(x)}\right|\leqq\varlimsup_{x\to r-0}\frac{1}{p(x)}\left|\int_0^{w/x}q_s(xt)d\psi(t)\right|$$
$$+\varlimsup_{x\to r-0}\frac{1}{p(x)}\left|\int_{w/x}^1 q_s(xt)d\psi(t)\right|$$

$$\leqq \overline{\lim_{x\to r-0}} \frac{1}{p(x)} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} q_n |s_n| w^n |d\psi(t)| + \frac{1}{\delta} \sup_{v \geqq w} \left| \frac{q_s(v)}{q(v)} \right|$$

$$= \frac{1}{\delta} \sup_{v \geqq w} \left| \frac{q_s(v)}{q(v)} \right|$$

である．ゆえに，もし $(J, q_n)\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ であるならば $(J, p_n)\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ である．和が一般の値の場合は容易にわかる．　(証明終)

すでに §9 で述べたように実数列 $\{\mu_n\}$ がモーメント数列であるとは，[0, 1] で定義された有界変動な実数値関数 $\psi(x)$ があって

$$\mu_n = \int_0^1 x^n d\psi(x) \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

と表されるときをいう．いま $\{\mu_n\}$ がモーメント数列であって，さらに $0<\delta\leqq 1$ なるある δ に対して

$$\mu_n \geqq \delta \int_0^1 x^n |d\psi^*(x)| \qquad (n=N, N+1, \cdots)$$

であるとき，$\{\mu_m\}$ を **$\bar{m}$-数列**であるということにしよう．ここで $\psi^*(x)$ は $\psi(x)$ を正規化して得られる関数とする．このように $\bar{m}$-数列を定義すると，定理 15.6 は次のように書ける:

もし $p_n = \mu_n q_n$ $(n=N, N+1, \cdots)$ で，$\{\mu_m\}$ は $\bar{m}$-数列，$r_p = r_q$ かつ (J, p_n) がパーマネントであるならば $(J, q_n) \subseteqq (J, p_n)$ である．

$\bar{m}$-数列に関する次の性質は容易に確かめられる．

(i)　もし $\{\mu_n\}$，$\{\mu_n'\}$ が $\bar{m}$-数列であるならば，$\{\mu_n+\mu_n'\}$ および $\{\mu_n\mu_n'\}$ も $\bar{m}$-数列である．

(ii)　$\mu_n = \alpha_n - \beta_n$ $(n=0, 1, \cdots)$，かつ $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ は完全単調な数列とする．(定理 9.15 参照) もし，ある $k>1$ に対して

$$\alpha_n \geqq k\beta_n \qquad (n=N, N+1, \cdots)$$

であるならば，$\{\mu_n\}$ は $\bar{m}$-数列である．

(iii)　もし，モーメント数列 $\{\mu_n\}$ が正の値に収束するならば，$\{\mu_n\}$ は $\bar{m}$-数列である．

(iv)　もし $\{\mu_n\}$，$\{1/\mu_n\}$ がともに正のモーメント数列であるならば，それらは $\bar{m}$-数列である．

定理 15.6 を使うと定理 15.4 の証明は次のようになる．

$-1<k'<k$ とし，A_k-および $A_{k'}$-総和法にはそれぞれ

$$q_n=\binom{n+k}{k},\qquad p_n=\binom{n+k'}{k'}$$

が対応する．

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-k')\Gamma(k'+1)}\int_0^1 x^n x^{k'}(1-x)^{k-k'-1}dx$$

であるから，$\{p_n/q_n\}$ は完全単調なモーメント数列で，また $\overline{m}$-数列でもある．ゆえに定理 15.6 より $A_k\subseteqq A_{k'}$ である．

次の定理はアーベル総和法とチェザロ (C, k)-総和法との関係を与える．

定理 15.7. もし，ある $k>-1$ に対して $(C, k)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$ ならば $A\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$ である．

この定理を証明するために，まず次の補助定理を証明する．

補助定理 15.8. もし $c(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$，$d(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ が $0\leqq x<1$ で収束し，$d_n>0$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n=\infty$，かつ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{d_n}=s$ ならば $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{c(x)}{d(x)}=s$.

証明. 仮定より，任意の N に対して

$$\lim_{x\to 1-0} d(x)\geqq \lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{N} d_n x^n=\sum_{n=0}^{N} d_n$$

であるから $\lim\limits_{x\to 1-0} d(x)=\infty$ である．いま

$$\delta_n=\frac{c_n}{d_n}-s,\qquad \varepsilon_n=\sup_{\nu\geqq n}|\delta_\nu|$$

とおくと，$\varepsilon_n\searrow 0$ で，かつ

$$\frac{c(x)}{d(x)}-s=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta_n d_n x^n}{d(x)}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{N}\delta_n d_n x^n}{d(x)}+\frac{\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\delta_n d_n x^n}{d(x)}.$$

ゆえに

$$\left|\frac{c(x)}{d(x)}-s\right|\leqq \varepsilon_0\frac{\sum\limits_{n=0}^{N} d_n x^n}{d(x)}+\varepsilon_N$$

となる．この右辺は $x\to 1-0$ のとき ε_N に近づく．N は任意であるから補助定理は証明された．

定理 15.7 の証明. いま $c_n=\sum\limits_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu+k-1}{k-1}s_\nu=S_n^{(k)}$　(§6 参照)，

$d_n=\binom{n+k}{k}$ とすると，$k>0$ に対し補助定理の条件はすべて満足される．

ゆえに $\lim_{n\to\infty} c_n/d_n=\lim_{n\to\infty} S_n^{(k)}\Big/\binom{n+k}{k}=s$ より

$$s=\lim_{x\to 1-0}\frac{c(x)}{d(x)}=\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^n$$

となる．定理 6.1 より $k>-1$ に対して本定理は成り立つ．　(証明終)[4]

この定理はさらに次のように一般化される．

定理 15.9. **(ブーアワインの定理)**　任意の k, $l>-1$ に対し $(C, k)\subseteqq A_l$ である．　(証明略)

§16.　対数総和法

前節で述べたように，数列 $\{s_n\}$ が与えられたとき L-総和法は

$$\frac{-1}{\log(1-x)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{n+1}x^{n+1}$$

の $x\to 1-0$ としたときの極限として定義される．まず次の定理を証明しよう．本節の諸定理の多くはブーアワインによる．

定理 16.1.　L-総和法は転移的である．

この定理を証明するために次の補助定理を証明する．

補助定理 16.2.　もし $\{s_n\}$ が L-総和可能であって，かつ，ある実数 α に対して

$$(n+\alpha)\sigma_n=s_n \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるならば，$L\text{-}\lim_{n\to\infty}\sigma_n=0$ である．

証明.　$m>|\alpha|+2$ なる整数 m を一つ定め

$$\varphi(x)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{s_n}{n+1}x^{n+\alpha-1} \qquad (|x|<1)$$

とおく．仮定より $\{\log(1-x)\}^{-1}\varphi(x)$ は $x\to 1-0$ のとき有限確定である．また $x^{-1}\varphi(x)$ は $x\to +0$ のとき 0 に収束するから

$$\varphi(x)=O\{|\log(1-x)|\} \qquad (0\leqq x<1).$$

---

4)　$f(x)=e^{1/(1+x)}=\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n$ $(0\leqq x<1)$ で定義される級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ はアーベル総和可能であるが，どのような k に対しても (C, k)-総和可能でない．

ゆえに

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\sigma_n}{n+1}x^{n+1}=x^{1-\alpha}\int_0^x\varphi(t)\,dt$$

$$=O\left\{x^{1-\alpha}\int_0^x|\log(1-t)|\,dt\right\}$$

$$=o\{|\log(1-x)|\}\qquad(x\to1-0).$$

(補助定理 16.2 の証明終)

定理 16.1 の証明. $L\text{-}\lim_{n\to\infty}s_n=s$ と仮定すると

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_{n+1}}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{n(n+1)}x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{n-1}}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{n+1}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{(n+2)(n+1)}x^{n+1}$$

と補助定理より明らかである. (証明終)

定理 16.3. 任意の $k>-1$ に対して $A_k\subseteqq L$ である.

証明. L-および A_k-総和法にはそれぞれ

$$p_n=\frac{1}{n+1},\qquad q_n=\binom{n+k}{k}$$

が対応する.

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\binom{n+k}{k}}=\frac{1}{k+1}\left(1+\frac{k}{n+1}\right)\frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}}$$

で, $\left\{1+\dfrac{k}{n+1}\right\}$ はモーメント数列で, $n\to\infty$ のとき1に収束する. また

$$\frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}}=(k+1)\int_0^1x^n(1-x)^k\,dx\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるから $\left\{1\Big/\binom{n+k+1}{k+1}\right\}$ は完全単調な数列である. ゆえに前節より $\{p_n/q_n\}$ は $\bar{m}$-数列であり, 定理 15.6 より求める結果が得られる.

(証明終)

定理 16.4. $l\subset L.$ (証明略)

l-総和法と L-総和法の間の関係は, $(C,1)$-総和法とアーベル総和法 A の間の関係に似ている.

§17.　ボレル総和法

すでに §15 で述べたように，数列 $\{s_n\}$ が与えられたとき

$$f(x)=e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}s_n\frac{x^n}{n!} \tag{17.1}$$

がすべての $x>0$ に対して収束し，かつ $\lim_{x\to\infty}f(x)=s$ のとき $\{s_n\}$ は値 s にボレル (B)-総和可能という．この総和法はまた**ボレル巾総和法**ともいう．この総和法は巾級数に対して極めて有効である．たとえば $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ は $|z|<1$ で収束し，$|z|\geqq 1$ で発散する．この級数に B-総和法を適用しよう．

$$s_n(z)=1+z+\cdots+z^n=\frac{1}{1-z}-\frac{z^{n+1}}{1-z}$$

なるゆえ，

$$e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}s_n(z)\frac{x^n}{n!}=e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-z}-\frac{z^{n+1}}{1-z}\right)\frac{x^n}{n!}$$
$$=\frac{1}{1-z}-\frac{e^{-x}\cdot z\cdot e^{zx}}{1-z}$$

となる．ここで，もし $\mathfrak{R}(z-1)<0$ ならば，$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}\cdot z\cdot e^{zx}}{1-z}=0$ なるゆえ

$$B\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z},$$

すなわち $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ は半平面 $\mathfrak{R}(z)<1$ で $\frac{1}{1-z}$ に B-総和可能である．

§11 で述べたオイラー総和法とボレル巾総和法との間には次のような関係がある．丁度チェザロ総和法とアーベル総和法との関係に似ている．

定理 17.1. (**クノップの定理**)　もし $0<p\leqq 1$ なるある p に対して E_p-$\lim_{n\to\infty}s_n=s$ ならば B-$\lim_{n\to\infty}s_n=s$ である．

証明.　もし数列 $\{s_n\}$ が値 s に E_p-総和可能であるならば，

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}p^{\nu}(1-p)^{n-\nu}s_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくとき $\lim_{n\to\infty}t_n=s$ である．

定理 11.3 より $(E_p)^{-1}=E_{1/p}$ であるから，

$$s_n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\left(\frac{1}{p}\right)^{\nu}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-\nu}t_\nu$$

$$=\left(\frac{1}{p}\right)^n\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(p-1)^{n-\nu}t_\nu,$$

ゆえに

$$\sum_{n=0}^{\infty}s_n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{p}\right)^n\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(p-1)^{n-\nu}t_\nu\right\}\frac{x^n}{n!}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t_\nu}{\nu!(p-1)^\nu}\sum_{n=\nu}^{\infty}\left(\frac{p-1}{p}\right)^n\frac{x^n}{(n-\nu)!}$$
$$=e^{\frac{p-1}{p}x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{x}{p}\right)^\nu t_\nu \qquad (x>0)$$

となり，

$$e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}s_n\frac{x^n}{n!}=e^{-y}\sum_{\nu=0}^{\infty}t_\nu\frac{y^\nu}{\nu!},$$

となる．ここで $y=\dfrac{x}{p}$ とする．$x\to\infty$ のとき $y\to\infty$ で，かつ $\lim_{n\to\infty}t_n=s$ なるゆえ定理 15.3 系より $B\text{-}\lim_{n\to\infty}s_n=s$ は明らかである． （証明終）

ボレル巾総和法に対して**ボレル積分総和法**（B'）は次のように定義される．級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ が与えられたとき，

$$g(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu(x)u_\nu, \tag{17.2}$$

ただし

$$b_\nu(x)=\frac{1}{\nu!}\int_0^x t^\nu e^{-t}dt \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

とし，$g(x)$ がすべての $x>0$ に対して収束し，かつ $\lim_{x\to\infty}g(x)=s$ であるとき $B'\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ と書く．この総和法がパーマネントであることは定理 4.4 と

$$b_\nu(x)=\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{-x}+b_{\nu+1}(x) \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

とから容易にわかる．

もし (17.2) の級数が収束するならば，

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{|u_\nu|}{\nu!}\int_0^x t^\nu e^{-t}dt=0$$

である．他方 $\int_0^x t^\nu e^{-t}dt\geqq e^{-x}\dfrac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$ であるから

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{|u_\nu|x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}=0$$

となる．ゆえに $\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\sqrt[\nu]{\dfrac{|u_\nu|}{\nu!}}\leqq\dfrac{1}{x}$ となり，コーシー・アダマールの定理より

$$u(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu\frac{t^\nu}{\nu!} \tag{17.3}$$

は $0\leqq t<x$ で収束する．$x>0$ は任意であることと巾級数の一様連続性とから，(17.2) の和と積分の順序交換ができて

$$g(x)=\int_0^x e^{-t}\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu\frac{t^\nu}{\nu!}dt=\int_0^x e^{-t}u(t)dt \tag{17.4}$$

と書ける．ゆえに B'-総和法はまた $\int_0^\infty e^{-t}u(t)dt=s$ とも書ける．

B-，B'-両総和法の間には次のような関係がある．

定理 17.2.　$B\subset B'$.

証明.　もし $B\text{-}\lim_{n\to\infty}s_n=s$ ならば，$\sum_{n=0}^{\infty}s_n\dfrac{x^n}{n!}$ はすべての $x>0$ に対して収束するから，$s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ とおくとき，$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\dfrac{x^n}{n!}$ もすべての $x>0$ に対して収束する．また

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x)&=\frac{d}{dx}\left\{e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}s_n\frac{x^n}{n!}\right\}\\&=e^{-x}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}s_{n+1}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}s_n\frac{x^n}{n!}\right\}\\&=e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}\frac{x^n}{n!}=e^{-x}\frac{d}{dx}u(x)\end{aligned}$$

である．ゆえに

$$\begin{aligned}f(x)&=u_0+\int_0^x e^{-t}\frac{d}{dt}u(t)dt\\&=e^{-x}u(x)+\int_0^x e^{-t}u(t)dt \qquad (17.5)\\&=\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\end{aligned}$$

である．この式を g に関する微分方程式とみなして解くと

$$g(x)=e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$$

となる．定理の仮定より $\lim_{t\to\infty} f(t)=s$ なるゆえ

$$\delta(x)=\sup_{t\geqq x}|f(t)-s|$$

とおくと，$\delta(x)\searrow 0$ $(x\to\infty)$ である．ゆえに

$$\begin{aligned}|g(x)-s| &= \left|e^{-x}\int_0^x e^t\{f(t)-s\}dt-se^{-x}\right| \\ &\leqq |s|e^{-x}+\left|e^{-x}\int_0^y e^t\{f(t)-s\}dt\right| \\ &\qquad +\left|e^{-x}\int_y^x e^t\{f(t)-s\}dt\right| \\ &\leqq |s|e^{-x}+\delta(0)e^{-x+y}+\delta(y)\end{aligned}$$

である．$y=x/2$ とおき $x\to\infty$ とすると $\lim_{x\to\infty} g(x)=s$，すなわち $B'\text{-}\sum_{n=0}^\infty u_n=s$ となり $B\subseteqq B'$ が証明された．

次に $g'(x)=\cos e^x$ とおくと，

$$g(x)=\int_0^x \cos e^t dt=\int_1^{e^x}\frac{\cos t}{t}dt$$

となり，$\lim_{x\to\infty} g(x)$ は収束する．しかし $\lim_{x\to\infty} g'(x)$ は発散するから (17.5) より $\lim_{x\to\infty} f(x)$ は発散する．ゆえに，このような $g(x)$ をもつ級数（または数列）は，B'-総和可能であるが B-総和可能ではない．　（証明終）

定理 17.3.　$B\text{-}\sum_{n=0}^\infty u_n=s$ と $B'\text{-}\sum_{n=0}^\infty u_{n+1}=s-u_0$ とは同値である．

証明．

$$e^{-x}\sum_{n=0}^\infty s_n\frac{x^n}{n!}-u_0=\int_0^x e^{-t}\sum_{n=0}^\infty u_{n+1}\frac{t^n}{n!}dt \qquad (x\geqq 0)$$

より明らか．　（証明終）

定理 17.4.　B, B' 総和法は左へ転移的であるが，右へは転移的でない．

証明．　前2定理より明らか．

次の定理は §13 で述べた S_α-総和法とボレル総和法との関係を与える．

定理 17.5.（**マイヤーケーニッヒの定理**）　$0<\alpha<1$ とし，もし数列 $\{s_n\}$ が S_α-適用可能で，かつ $B\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=s$ ならば $S_\alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=0$ である．

証明．　仮定より任意の $n=0, 1, \cdots$ に対して

$$t_n=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^\infty\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_\nu$$

は有限確定である．B'-総和法はパーマネントなるゆえ

$$t_n=(1-\alpha)^{n+1}\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\frac{\alpha^\nu s_\nu}{\nu!}t^\nu\right]dt$$
$$=\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n!}\lim_{x\to\infty}\left\{\left[e^{-t}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+n)\cdots(\nu+2)\frac{\alpha^\nu s_\nu}{\nu!}t^{\nu+1}\right]_0^x\right.$$
$$\left.+\int_0^x e^{-t}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+n)\cdots(\nu+2)\frac{\alpha^\nu s_\nu}{\nu!}t^{\nu+1}\right]dt\right\}$$

である．また定理 13.2 より，ある n とある M に対して

$$|s_\nu|\leqq\frac{M}{\nu^{n+1}\alpha^\nu}\qquad(\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

なるゆえ，

$$|s_\nu|\leqq\frac{M}{(\nu+1)(\nu+2)[(\nu+n)\cdots(\nu+2)]\alpha^\nu}\qquad(\nu=0,\ 1,\ \cdots)^{1)}$$

である．よって

$$\left|e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+n)\cdots(\nu+2)\frac{\alpha^\nu s_\nu}{\nu!}x^{\nu+1}\right|$$
$$\leqq Me^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+2)!}=\frac{M(e^x-1-x)}{xe^x}\to 0\qquad(x\to\infty),$$

ゆえに

$$t_n=\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n!}\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+n)\cdots(\nu+2)\frac{\alpha^\nu s_\nu}{\nu!}t^{\nu+1}\right]dt$$

となる．同様にさらに $n-1$ 回部分積分をすると

$$t_n=\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n!}\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\alpha^\nu s_\nu}{\nu!}t^{\nu+n}\right]dt$$
$$=\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n!}\int_0^\infty t^n e^{(\alpha-1)t}f(\alpha t)\,dt$$
$$=\frac{w^{n+1}}{n!}\int_0^\infty t^n e^{-wt}f(t)\,dt$$

となる．ここで $f(t)=e^{-t}\sum_{\nu=0}^{\infty}s_\nu\frac{t^\nu}{\nu!}$，$w=\frac{1-\alpha}{\alpha}$ とする．

仮定より $\lim_{t\to\infty}f(t)=s$ なるゆえ，任意の $\varepsilon>0$ に対して $y>0$ を十分大きくとれば

---

1)　この式の M は上式の M と必ずしも同じ値でない．

$$|f(t)-s|<\varepsilon \qquad (t\geqq y)$$

とできる．さらに $|f(t)-s|\leqq K$ $(t\geqq 0)$ とすれば，

$$t_n-s=\frac{w^{n+1}}{n!}\int_0^\infty t^n e^{-wt}\{f(t)-s\}dt$$

なるゆえ

$$|t_n-s|\leqq\frac{Kw^{n+1}}{n!}\int_0^y t^n dt+\varepsilon.$$

この右辺第1項は n を大きくすれば任意に小さくなるゆえ，$\lim_{n\to\infty}t_n=s$ である．　　　　（証明終）

§18.　リーマン総和法，概収束，その他

級数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ が与えられ，その部分和を

$$s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とする．$p=1,\ 2,\ \cdots$ が与えられたとき，

$$f(h)=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^p$$ [1)]

が十分小さな $h>0$ に対して収束し，かつ $\lim_{h\to+0}f(h)=s$ のとき，$\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu$ は値 s に $(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{p})$-**総和可能**という．

同様に $p=1,\ 2,\ \cdots$ が与えられたとき，

$$g(h)=h\sum_{\nu=0}^{\infty}s_\nu\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^p$$

が十分小さな $h>0$ に対して収束し，かつ $\lim_{h\to+0}g(h)=A_p s$ のとき，$\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu$（または $\{s_n\}$）は値 s に $(\boldsymbol{R}_p)$-**総和可能**という．ここで

$$A_p=\lim_{h\to+0}h\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^p$$

とおく．

これらの総和法は三角級数の研究にしばしば使われる．$(R,1)$-総和法を特に**ルベーグ総和法**，また $(R,2)$-総和法を**リーマン総和法**という．これらについては次の定理が成り立つ．

---

1)　$\frac{\sin 0}{0}=1$ とおく．

定理 18.1.　(R, p)-および (R_p)-総和法は $p\geqq 2$ に対してはパーマネントであるが，$p=1$ に対してはそうでない．

証明.　$(R, 2)$ についてだけ証明をしよう．定理 4.4 により

$$b_\nu(h)=\left(\frac{\sin \nu h}{\nu h}\right)^p \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくとき，

$$\text{(i)} \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu(h)-b_{\nu+1}(h)| \leqq M \qquad (0<h<\sigma)$$

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{h\to+0} b_\nu(h)=1 \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

を示せばよい．

(ii) については明らかである．(i) については，左辺は

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\left\{\frac{\sin \nu h}{\nu h}\right\}^2-\left\{\frac{\sin(\nu+1)h}{(\nu+1)h}\right\}^2\right|\\ &=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\int_{\nu h}^{(\nu+1)h}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt\right|\\ &\leqq\int_0^{\infty}\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right|dt\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=2\frac{\sin t}{t}\,\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}$$

であるから，最後の式の被積分関数は $t=0$ の近傍で有界である．また $t\to\infty$ に対しては

$$\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right|\leqq 2\frac{t+1}{t^3}=O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

であるから (i) は明らかである．　　　　(証明終)

(R, p) および (R_p)-総和法については，カットナー，ハーディ・ロゴシンスキー，フェルブルンスキー，マルチンキヴィッチなどによりさらに次の諸定理が証明されている．証明を省いて結果だけを紹介しよう．

定理 18.2.　もし $p\geqq 2$ ならば，$(R, 1)\subseteqq(R, p)$，$(R_1)\subseteqq(R_p)$．

定理 18.3.　もし $p\geqq 3$ ならば，$(R, 2)\subseteqq(R, p)$，$(R_2)\subseteqq(R_p)$．

定理 18.4.　$(R, 1)$ と (R_1) のいずれの一方も他方より強くない．

定理 18.5.　$(R, 2)$ と (R_2) のいずれの一方も他方より強くない．

定理 18.6.　$(R, 3)$ と (R_3) のいずれの一方も他方より強くない．

定理 18.7.　A をアーベル総和法とすると，$(R, 2)\subseteqq A$, $(R_2)\subseteqq A$.

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が与えられたとき，

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu \frac{\nu x e^{-\nu x}}{1-e^{-\nu x}}$$

が $x>0$ に対して収束して，かつ $\lim_{x\to+0} f(x)=s$ であるとき，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ は値 s に**ランベルト総和可能**といい $\boldsymbol{Lb}\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} u_n=s$ と書く．この総和法は整数論の研究に応用される．この総和法はチェザロ総和法より強く，アーベル総和法 A より弱い，すなわち任意の $k>-1$ に対して

$$(C, k)\subseteqq Lb\subseteqq A$$

である．

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が与えられたとき，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu \frac{(n!)^\nu}{(n-\nu)!(n+\nu)!}$$

によって定義される総和法を**ドゥラヴァレープッサン総和法**（$\boldsymbol{VP}$）という．この総和法とチェザロ総和法との間には，任意の $k>-1$ に対して

$$(C, k)\subseteqq VP$$

なる関係がある．

行列 $A=(a_{n\nu})$ と $k>0$ が与えられている．与えられた数列 $\{s_n\}$ に対して，

$$\tau_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}|s_\nu-s|^k$$

がすべての $n=0, 1, \cdots$ に対して収束して，かつ

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n=0$$

であるような s が存在するとき，$\{s_n\}$ は値 s に k 次の**強 A-総和可能**という．今まで述べられた多くの総和法に対して，その強総和法を定義することができる．

数列 $\{s_n\}$ が与えられたとき，n に関して一様に

$$\lim_{p\to\infty} \frac{s_n+s_{n+1}+\cdots+s_{n+p}}{p+1}=s$$

であるとき，$\{s_n\}$ は値 s に**概収束**するといい，$\boldsymbol{F}\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=s$ と書く．このときには $\{s_n\}$ は有界数列であることは容易にわかる．この総和法がパーマネントであることも明らかである．この総和法はローレンツにより導入されたもので，次に述べるような性質をもつ．

有界実数列 $\boldsymbol{s}=\{s_n\}$ の全体からなる集合 $\boldsymbol{S}_B{}^R$ の上に**バナッハ極限**といわれる次のような線形汎関数 L が存在する[2]:

（i）　任意の $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}\in\boldsymbol{S}_B{}^R$ と任意の実数 a, b に対して

$$L(a\boldsymbol{s}+b\boldsymbol{t})=aL(\boldsymbol{s})+bL(\boldsymbol{t}),$$

（ii）　もし $s_n\geqq 0$ $(n=0, 1, \cdots)$ ならば $L(\boldsymbol{s})\geqq 0$,

（iii）　$\boldsymbol{s}=\{s_n\}_{n=0,1,\cdots}$, $\boldsymbol{s}'=\{s_{n+1}\}_{n=0,1,\cdots}$ とすると $L(\boldsymbol{s}')=L(\boldsymbol{s})$,

（iv）　もし $s_0=s_1=\cdots=1$ ならば $L(\boldsymbol{s})=1$.

（i）－(iv)から

$$\varliminf_{n\to\infty} s_n\leqq L(\boldsymbol{s})\leqq\varlimsup_{n\to\infty} s_n$$

は容易にわかる．

いま，任意の $\boldsymbol{s}=\{s_n\}\in\boldsymbol{S}_B{}^R$ に対して

$$q(\boldsymbol{s})=\inf_{n_0, n_1, \cdots, n_p}\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} s_{n_i+k},$$

$$q'(\boldsymbol{s})=-q(-\boldsymbol{s})=\sup_{n_0, n_1, \cdots, n_p}\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} s_{n_i+k},$$

とおく．ここで p; $n_0, n_1, \cdots, n_p$ はあらゆる正の整数の組合せをとる．容易にわかるように

$$q(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t})\leqq q(\boldsymbol{s})+q(\boldsymbol{t}),$$

$$q(a\boldsymbol{s})=aq(\boldsymbol{s})\qquad(\text{ただし } a\geqq 0)$$

である．特に $\boldsymbol{s}$ が収束数列のときには，$q(\boldsymbol{s})$ はその極限値と一致する．

線形汎関数の接続に関するよく知られた定理[3] よりバナッハ極限 L の存在がわかり，

$$q'(\boldsymbol{s})\leqq L(\boldsymbol{s})\leqq q(\boldsymbol{s})$$

2)　簡単のために，以下本節では数列および数はすべて実数とする．またこのようなバナッハ極限の存在の証明については，詳しくはバナッハ [5] 33 ページ以後を参照．

3)　バナッハ [5] 27 ページ以後を参照．

である．

しかし，このようなバナッハ極限は決して唯一とおりではない．それではどのような数列に対してすべてのバナッハ極限は一致するであろうか．

収束数列に対してはこのことはいえる．また数列 $\boldsymbol{s}=\{1,0,1,0,\cdots\}$ についてもこのことがいえて $L(\boldsymbol{s})=\dfrac{1}{2}$ となる．これに関して次の定理が成り立つ．

定理 18.8.（ローレンツの定理） 数列 $\boldsymbol{s}=\{s_n\}$ のすべてのバナッハ極限が一致するための必要十分条件は，s が概収束することである．

証明． 必要条件．もし数列 $\{s_n\}$ のすべてのバナッハ極限が一致した値 s をとるとすれば，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある正の整数 p；$n_0\leqq n_1\leqq\cdots\leqq n_p$ があって

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}s_{n_i+k}<s+\varepsilon$$

となる．ゆえに十分大きな k，たとえば $k\geqq k_0$ に対して

$$\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}s_{n_i+k}<s+\varepsilon \tag{18.1}$$

である．いま n_i の代りに n_i+k_0，k の代りに $k-k_0$ とすれば，(18.1) はすべての正の整数 k に対して成り立つ．

さて任意の正の整数 n に対して

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{K}\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}s_{n_i+k+n}&=\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=n_i}^{n_i+K}s_{j+n}\\&=\sum_{j=n_p}^{n_0+K}s_{j+n}+O(1)=\sum_{j=0}^{K}s_{j+n}+O(1)\end{aligned}$$

である．ここで最後の項 $O(1)$ は K と n に関して一様有界である．ゆえに (18.1) より，K を十分大きくすれば，すべての n に対して

$$\frac{1}{K+1}\sum_{j=0}^{K}s_{j+n}<s+2\varepsilon$$

である．同様に

$$\frac{1}{K+1}\sum_{j=0}^{K}s_{j+n}>s-2\varepsilon$$

である．ゆえに $F\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ である．

十分条件．もし $F\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ならば，任意の $\varepsilon>0$ に対してある p_0 があって，$p\geqq p_0$ なるすべての p とすべての n に対して

$$s-\varepsilon<\frac{1}{p+1}(s_n+s_{n+1}+\cdots+s_{n+p})<s+\varepsilon$$

である．ゆえに

$$s-\varepsilon\leqq q'(\boldsymbol{s})\leqq q(\boldsymbol{s})\leqq s+\varepsilon,$$

ε は任意なるゆえ，

$$L(\boldsymbol{s})=q'(\boldsymbol{s})=q(\boldsymbol{s})=s$$

である．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

行列総和法と概収束との間には次のような関係がある．

定理 18.9.（ローレンツの定理） T-行列 $A=(a_{n\nu})$ によって与えられる数列－数列型総和法を A とするとき，$F\subseteqq A$ であるための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}-a_{n,\nu+1}|=0 \tag{18.2}$$

なることである．

証明． 必要条件．数列 $\{s_n\}$ は

$$\tau_n=s_0+s_1+\cdots+s_n \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくとき，$\{\tau_n\}$ が有界数列であるようなものとする．このような $\{s_n\}$ については $F\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=0$ であることは容易にわかる．

行列 $A=(a_{n\nu})$ は T-行列なるゆえ，任意の $n=0,\ 1,\ \cdots$ に対して

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}s_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}(\tau_\nu-\tau_{\nu-1})$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_{n\nu}-a_{n,\nu+1})\tau_\nu \qquad (\tau_{-1}=0)$$

で，さらに $F\subseteqq A$ なるゆえ，行列 $B=(b_{n\nu})$ を

$$b_{n\nu}=a_{n\nu}-a_{n,\nu+1} \qquad (n,\ \nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

により定義すると，B はシュアー行列である．

定理 3.4 より

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}-a_{n,\nu+1}|$$

はすべての $n=0,\ 1,\ \cdots$ に対して収束して，かつこの収束は n に関して一様である．また数列 $\{\tau_n\}$ として，$\{0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots\}$ なる特別な数列

を考えることにより

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n\nu}-a_{n,\nu+1})=0 \qquad (\nu=0,\ 1,\cdots)$$

であることがわかる．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}-a_{n,\nu+1}|=0$$

である．

十分条件．(18.2) が成り立ち，かつ $F\text{-}\lim_{n\to\infty}s_n=s$ と仮定する．任意の $\varepsilon>0$ に対して，正の整数 p を十分大きくとると

$$\frac{1}{p+1}(s_\nu+s_{\nu+1}+\cdots+s_{\nu+p})=s+\sigma_\nu,$$

$$|\sigma_\nu|<\varepsilon \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

となる．ゆえに

$$\frac{1}{p+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}(s_\nu+s_{\nu+1}+\cdots+s_{\nu+p})=s\zeta_n+\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}\sigma_\nu \tag{18.3}$$

となる，ここで $\zeta_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}$ とおく．

行列 A は T-行列であるから，$\lim_{n\to\infty}\zeta_n=1$,

$$\lim_{n\to\infty}a_{n\nu}=0 \qquad (\nu=0,\ 1,\ \cdots)$$

である．ゆえに (18.3) の左辺は，$n\to\infty$ とするとき

$$\frac{1}{p+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}(s_\nu+s_{\nu+1}+\cdots+s_{\nu+p})$$

$$=\sum_{\nu=p}^{\infty}s_\nu\frac{1}{p+1}(a_{n\nu}+a_{n,\nu-1}+\cdots+a_{n,\nu-p})+o(1) \tag{18.4}$$

$$=t_n+\sum_{\nu=p}^{\infty}s_\nu\left\{\frac{1}{p+1}(a_{n\nu}+a_{n,\nu-1}+\cdots+a_{n,\nu-p})-a_{n\nu}\right\}+o(1)$$

となる．ここで $t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}s_\nu$ とおく．いま，

$$|s_n|\leqq H \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと，(18.4) の最後の式の第2項は

$$\left|\sum_{\nu=p}^{\infty}s_\nu\left\{\frac{1}{p+1}(a_{n\nu}+a_{n,\nu-1}+\cdots+a_{n,\nu-p})-a_{n\nu}\right|\right.$$

$$\leqq \frac{H}{p+1}\sum_{\rho=0}^{p}\sum_{\nu=p}^{\infty}|a_{n,\nu-\rho}-a_{n\nu}|$$

$$\leqq \frac{H}{p+1}\sum_{\rho=0}^{p}\rho\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}-a_{n,\nu+1}|$$

$$=\frac{p}{2}H\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}-a_{n,\nu+1}|$$

となる．

(18.2)，(18.3)，(18.4) より

$$t_n=s\zeta_n+\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}\sigma_\nu+o(1) \qquad (n\to\infty)$$

となる．A は T-行列であるから

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|\leqq\xi \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと，n を十分大きくとると

$$|t_n-s|\leqq(\xi+1)\varepsilon$$

となり $A\text{-}\lim_{n\to\infty}s_n=s$ が成り立つ．　　　　(証明終)

(C, k)-総和法 $(k>0)$ および E_p-総和法 $(0<p<1)$ は上の条件を満足する．

演習問題 2

1.　級数 $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cos nx+\cdots$ は $x\neq 2k\pi$ $(k=0,\ 1,\ \cdots)$ 対して値 0 に $(C, 1)$-総和可能であることを示せ．

2.　級数　$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx+\cdots$　は　$x\neq k\pi$ $(k=0,\ 1,\ \cdots)$　に対して値 $\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$ に $(C, 1)$-総和可能であることを示せ．

3.　巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ が $(C, 1)$-総和可能であるような z の範囲を求めよ．

4.　$(C, k)\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$,　$(C, l)\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}v_n=t$　$(k,\ l>-1)$　であるならば，

$$w_n=u_nv_0+u_{n-1}v_1+\cdots+u_0v_n \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと，$(C, k+l+1)-\sum_{n=0}^{\infty}w_n=st$ であることを証明せよ．ここで $\sum_{n=0}^{\infty}w_n$ を $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty}v_n$ のコーシー積級数という．

5.　もし (N, q_n) がパーマネントなネールンド総和法で，かつ $\{q_n\}$ が単調増加な数列であるならば $(C, 1)\subseteqq(N, q_n)$ であることを示せ．

6. $(C, 1)\subset l$ を示せ.

7. $[a,b]$ において $f(x)$, $g(x)$ はともに連続, $\psi(x)$ は有界変動な関数とする. $\varphi(x)=\int_a^x f(t)d\psi(t)$ とおくと, $\varphi(x)$ は $[a, b]$ で有界変動な関数で,

$$\varphi(x+0)-\varphi(x)=f(x)\{\psi(x+0)-\psi(x)\} \qquad (a\leqq x<b),$$

$$\varphi(x)-\varphi(x-0)=f(x)\{\psi(x)-\psi(x-0)\} \qquad (a<x\leqq b)$$

であることを示せ. さらに

$$\int_a^b g(x)d\varphi(x)=\int_a^b g(x)f(x)d\psi(x)$$

を示せ.

8. $k>0$ に対して

$$\frac{1}{\binom{n+k}{k}}=k\int_0^1 x^n(1-x)^{k-1}dx \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であることを示せ.（99 ページ, 例1参照.）

9. 実数列 $\{\mu_n\}$, $\{\mu_n'\}$ がともにモーメント数列であるならば, $\{\mu_n+\mu_n'\}$, $\{\mu_n-\mu_n'\}$, $\{\mu_n\mu_n'\}$ はすべてモーメント数列であることを示せ.

10. $(C, 1)$-総和法と $E_{1/2}$-総和法は共存することを示せ.

11. $(C, 1)$-総和法と $E_{1/2}$-総和法のいずれの一方も他方より強くないことを示せ.

12. E_p $(0<p\leqq 1)$, B, T_α $(0<\alpha<1)$, S_β $(0<\beta<1)$ のすべての総和法は共存することを示せ.

13. A_k-総和法 $(k>-1)$ は,（左右へ）転移的であることを示せ.

14. $0<\alpha<1$ なるある α に対して T_α-$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$, かつ $\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n$ が収束半径1をもつならば A-$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ であることを示せ. ここで A はアーベル総和法を表す.

第3章　タウバー型定理

§19.　アーベル総和法に関するタウバー型定理

A をアーベル総和法とすると，定理 15.1 より，もし $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ ならば $A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$，すなわちアーベル総和法はパーマネントであることがわかる．一般の総和法について，このようにパーマネントであることを保証する定理を**アーベル型定理**といい，この逆にあたる定理を**タウバー型定理**という[1]．すなわち「$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ がある総和法で値 s に総和可能であって，かつ u_n がある付帯条件，たとえば $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$，あるいは $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$，… などを満足するならば $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ である」というような形の定理である．ここで u_n に関する付帯条件を**タウバー型条件**という．この名前は次の古典的な**タウバーの定理**に由来する．

定理 19.1.　もし $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が値 s にアーベル総和可能であって，かつ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n+1} = 0 \tag{19.1}$$

であるならば，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ である．

証明.（i）まず条件 (19.1) の代りに $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$，すなわち $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ と仮定する．いま $\delta_n = \sup_{k \geqq n} |ku_k|$ とおくと，数列 $\{\delta_n\}$ は単調に減少して 0 に収束する．

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n (x^n - 1) + \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n x^n \qquad (0 \leqq x < 1)$$

なるゆえ

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - \sum_{n=0}^{N} u_n \right| \leqq \sum_{n=0}^{N} |u_n n(x-1)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{nu_n x^n}{n} \right|$$

$$\leqq (1-x) N\delta_0 + \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)}$$

---

1)　アーベルの定理は，このままでは逆は成立しないことは明らかであろう．

である．任意に与えられた $\varepsilon>0$ に対して，$N=N(x)=\left[\dfrac{\varepsilon}{1-x}\right]$ とおくと，$x\to 1-0$ とするとき N はあらゆる正の整数を通り $N\to\infty$ となる．かつ

$$\overline{\lim_{x\to 1-0}}\left|\sum_{n=0}^{\infty}u_n x^n-\sum_{n=0}^{N}u_n\right|\leqq\varepsilon\delta_0$$

であるから定理は証明された．

(ii) (19.1) を仮定し

$$v_0=0,\qquad v_n=u_1+2u_2+\cdots+nu_n\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とおくと，$v_n=o(n)$ で

$$u_n=\frac{1}{n}(v_n-v_{n-1})\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

$$f(x)=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_{n-1}}{n}x^n$$

$$=u_0+(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n(n+1)}x^{n+1}$$

である．$v_n=o(n)$ ゆえアーベルの定理より

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}x^n=0,$$

よって

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=s=u_0+\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n(n+1)}x^{n+1}$$

である．ここで　$\alpha_n=\dfrac{v_n}{n(n+1)}$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x^n=s-u_0$ かつ $\alpha_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$なるゆえ，(i) より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=s-u_0$，すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n(n+1)}=s-u_0.$$

他方

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{v_n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{v_n}{n}-\frac{v_n}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{N}u_n-\frac{v_N}{N+1}$$

なるゆえ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ である．　　　　　　　　　　(証明終)

系． もしある $k>-1$ に対して (C,k)-$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ で，かつ (19.1) なら $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s.$

これは定理 15.7 より $(C, k) \subseteqq A$ なるゆえ明らかである．

一般に総和法 V が**加法的**であるとは，$V\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ で $V\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} v_n = t$ ならば $V\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = s + t$ であるときをいう．いま証明したタウバーの定理では，最初

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{19.2}$$

がアーベル総和法のタウバー型条件であることを証明して，次にそれを使って

$$\sigma_n = \frac{\sum_{\nu=0}^{n} \nu u_\nu}{n+1} = o(1) \tag{19.3}$$

もまたタウバー型条件であることを証明した．これに関連して次の一般的な定理が成り立つ．

定理 19.2. **(マイヤーケーニッヒ・ティーツの定理)**　V をパーマネントで，かつ加法的な任意の総和法とする．もし (19.2) が V のタウバー型条件であるならば，(19.3) もまた V のタウバー型条件である．

証明.　(19.2) は V のタウバー型条件であって，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ は値 s に V-総和可能で，かつ (19.3) が満足されているとする．いま

$$w_0 = u_0, \qquad w_n = \frac{\sigma_n}{n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおくと，数学的帰納法により

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (w_0 + w_1 + \cdots + w_n) + \sigma_n \qquad (n = 0, 1, \cdots) \tag{19.4}$$

が示される．$V\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ で，かつ $V\text{-}\lim(-\sigma_n) = 0$ なるゆえ，(19.4) と V の加法性より $V\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} w_n = s$ である． さらに $w_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ であるから定理の仮定より $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = s$ である．$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$ なるゆえ，ふたたび (19.4) により $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ が得られる．　(証明終)

最初アーベル総和法について証明されたこの種の定理は，その後第2章で述べられた各種の総和法について研究され，今日では数多くのタウバー型定理が得られている．しかし本書ではアーベル総和法のタウバー型定理についてさらに立入ってしらべよう．

リットルウッドは上のタウバーの定理を次のように一般化した.

定理 19.3. もし $A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ で，かつ

$$u_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{19.5}$$

ならば，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ である.

原証明は長くて難しい. ハーディ・リットルウッドは，さらに上の条件 (19.5) をより弱い条件でおきかえた. 以後本節では u_n, s_n はすべて実数とする.

定理 19.4. もし $A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ で，かつ

$$nu_n \geqq -H \qquad (n=1, 2. \cdots) \tag{19.6}$$

ならば，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$ である. ここで H は任意に固定した定数とする[2].

本節では以後この定理を順を追って証明しよう.

定理 19.5.[3] **(ハーディ・リットルウッドの定理)** もし $A\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$ で，かつ

$$s_n \geqq -H \qquad (n=0, 1, \cdots) \tag{19.7}$$

ならば $(C, 1)\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n = s$ である.

証明. 条件 (19.7) を $s_n \geqq 0$ $(n=0, 1, \cdots)$ でおきかえて証明しても一般性を失わない. $s_n + H$ を考えればよいからである.

この定理をカラマタは次の補助定理を使い巧みに証明した.

補助定理 19.6. $g(x)$ は $[0, 1]$ でリーマン積分可能な実数値関数とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$p(x) < g(x) < P(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

$$\int_0^1 \{P(x) - p(x)\} dx < \varepsilon$$

であるような多項式 $p(x)$, $P(x)$ が存在する.

証明. まず $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$ なる α, β を任意にとり，$g(x)$ は $\alpha \leqq x \leqq \beta$ で 1，それ以外では 0 であるような関数とする. すると

---

2) 以後の定理においても H はこのように用いる.

3) この定理は $(C, 1) \subseteqq A$ 定理の一種の逆の定理である. このような定理もタウバー型定理という.

$$g(x) \leqq h(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$
$$\int_0^1 \{h(x)-g(x)\}dx<\varepsilon$$

であるような連続関数 $h(x)$ が存在する．ワイヤシュトラスの近似定理より

$$|h(x)-Q(x)|<\varepsilon \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

なる多項式 $Q(x)$ が存在する．いま $P(x)=Q(x)+\varepsilon$ とおくと，

$$g(x) \leqq h(x)<P(x),$$
$$\int_0^1 \{P(x)-g(x)\}dx \leqq \int_0^1 \{P(x)-Q(x)\}dx+\int_0^1 |Q(x)-h(x)|dx$$
$$+\int_0^1 \{h(x)-g(x)\}dx<3\varepsilon$$

である．同様に $p(x)<g(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$, $\int_0^1 \{g(x)-p(x)\}dx<3\varepsilon$ であるような多項式 $p(x)$ が存在する．このように特別の関数 $g(x)$ に対しては定理は証明された．

このような関数 $g(x)$ に定数を掛け，さらに有限個加えることにより，定理は階段関数 $g(x)$ に対して成り立つことがわかる．

もし $g(x)$ がリーマン積分可能な任意の関数とすると，

$$g_1(x) \leqq g(x) \leqq g_2(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$
$$\int_0^1 \{g_2(x)-g_1(x)\}dx<\varepsilon$$

であるような階段関数 $g_1(x)$, $g_2(x)$ が存在する．$g_1(x)$ には多項式 $p_1(x)$, $P_1(x)$，また $g_2(x)$ には多項式 $p_2(x)$, $P_2(x)$ が対応するとすれば，

$$p_1(x)<g(x)<P_2(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$
$$\int_0^1 \{P_2(x)-p_1(x)\}dx=\int_0^1 [\{P_2(x)-g_2(x)\}+\{g_2(x)-g_1(x)\}$$
$$+\{g_1(x)-p_1(x)\}]dx<3\varepsilon$$

となる．　　　　　　　　　　　　　　　　　　（補助定理の証明終）

この補助定理を使って定理 19.5 を証明しよう．まず任意の整数 $k \geqq 0$ をとり，

$$g(x)=x^k \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

とすると，定理の仮定より

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^{n+kn}=\frac{s}{1+k}$$

であるから

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^n g(x^n)=s\int_0^1 g(t)\,dt \tag{19.8}$$

が成り立つ．ゆえに (19.8) は $g(x)$ が任意の多項式のときに成り立つ．

つぎに $g(x)$ として

$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{ただし } 0\leqq x<\dfrac{1}{e},\\[2mm] \dfrac{1}{x}, & \text{ただし } \dfrac{1}{e}\leqq x\leqq 1\end{cases} \tag{19.9}$$

とおくと，前補助定理より任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$p(x)<g(x)<P(x)\qquad (0\leqq x\leqq 1),$$

$$\int_0^1\{P(x)-p(x)\}dx<\varepsilon$$

であるような多項式 $p(x)$, $P(x)$ が存在する．$s_n\geqq 0$ と仮定してあるから，

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^n g(x^n)\leqq(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^n P(x^n)\qquad(0\leqq x\leqq 1),$$

ゆえに

$$\overline{\lim_{x\to 1-0}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^n g(x^n)\leqq s\int_0^1 P(t)\,dt$$

$$\leqq s\int_0^1 g(t)\,dt+s\varepsilon$$

である．ε は任意ゆえ

$$\overline{\lim_{x\to 1-0}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^n g(x^n)\leqq s\int_0^1 g(t)\,dt,$$

同様に

$$\underline{\lim_{x\to 1-0}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^n g(x^n)\geqq s\int_0^1 g(t)\,dt,$$

したがって (19.9) で定義された関数 $g(x)$ に対しても (19.8) が成り立つことがわかる．

さて，この関数 $g(x)$ に対しては

$$g(x^n)=0\qquad\left(n>\frac{1}{\log\dfrac{1}{x}}\right),$$

$$\int_0^1 g(t)\,dt=1$$

であるから，(19.8) は

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{0\leqq n\leqq\left[\frac{1}{\log\frac{1}{x}}\right]} s_n=s$$

となる．ここで $x=e^{-\frac{1}{N}}$ とおくと，上式は

$$\lim_{N\to\infty}(1-e^{-\frac{1}{N}})\sum_{n=0}^{[N]} s_n=s,$$

すなわち

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{[N]+1}\sum_{n=0}^{[N]} s_n=s$$

となる．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(定理 19.5 の証明終)

この定理は，条件 (19,7) を $s_n=O(1)$ でおきかえても成り立つことはもちろんである．

次の段階のタウバー型定理に進もう．

定理 19.7.　もし $A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} u_n=s$ で，かつ

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\nu u_\nu\geqq -H\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

ならば，$(C,\ 1)\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} u_n=s$ である．

証明.　いま

$$\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots),$$

ただし $s_\nu=u_0+u_1+\cdots+u_\nu$，とおくと

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

$$=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_n x^n$$

であるから，項別積分により

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n x^{n+1}=\int_0^x \frac{f(t)}{(1-t)^2}dt \tag{19.10}$$

である．定理の仮定より $\lim_{t\to 1-0} f(t)=s$ であるから

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n x^{n+1}=\lim_{x\to 1-0}(1-x)\int_0^x\frac{f(t)}{(1-t)^2}dt=s.$$

ゆえに

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s_n-\sigma_n)x^n=\lim_{x\to 1-0}\left\{f(x)-(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n x^n\right\}=0,$$

すなわち数列 $\{s_n-\sigma_n\}$ は値 0 にアーベル総和可能である.

他方仮定より

$$s_n-\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\nu u_\nu\geqq -H$$

であるから, 定理 19.5 より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}(s_\nu-\sigma_\nu)=0$$

である. ここで

$$s_\nu-\sigma_\nu=(\nu+1)\sigma_\nu-\nu\sigma_{\nu-1}-\sigma_\nu=\nu(\sigma_\nu-\sigma_{\nu-1})$$

であるから

$$\sum_{\nu=0}^{n}\nu(\sigma_\nu-\sigma_{\nu-1})=o(n), \tag{19.11}$$

ただし $\sigma_{-1}=0$ とする.

また (19.10) より

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_n-\sigma_{n-1})x^n\\&=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n x^n=\frac{1-x}{x}\int_0^x\frac{f(t)}{(1-t)^2}dt\end{aligned}$$

である. この最後の式は $x\to 1-0$ のとき s に収束する. ゆえに級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma_n-\sigma_{n-1})$$

は値 s にアーベル総和可能である.

この級数はさらに (19.11) を満足するから, 定理 19.1 より $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=s$, すなわち $(C, 1)\text{-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n=s$ である.　(証明終)

定理 19.8. **(ランダウの定理)** もし $(C, 1)\text{-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n=s$ で, かつ

$$nu_n\geqq -H \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

ならば $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n=s$ である.

証明.　一般に数列 $\{y_n\}$ が与えられたとき，

$$\omega_n(\{y_n\}) = \sup_{k,\,l \geqq n} |y_k - y_l|$$

を数列 $\{y_n\}$ の**振動関数**という．これは n が大きくなるにつれて単調に減少する．いま

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \qquad \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu,$$

$$\omega_n = \omega_n(\{\sigma_n\}) \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと，

$$\begin{aligned} s_n &= \sigma_{n+\nu} + \frac{n}{\nu+1}(\sigma_{n+\nu} - \sigma_{n-1}) - \frac{1}{\nu+1}(\nu u_{n+1} + \cdots + u_{n+\nu}) \\ &\leqq \sigma_{n+\nu} + \frac{n}{\nu+1}\omega_{n-1} + \frac{H}{\nu+1}\left\{\frac{\nu}{n+1} + \frac{\nu-1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+\nu}\right\} \\ &\leqq \sigma_{n+\nu} + \frac{n}{\nu+1}\omega_{n-1} + \frac{H\nu^2}{(\nu+1)n} \\ &\leqq \sigma_{n+\nu} + \frac{n}{\nu+1}\omega_{n-1} + \frac{H\nu}{n}. \end{aligned}$$

ここで $\nu = \nu(n) = [n\sqrt{\omega_{n-1}}]$ とおき $n \to \infty$ とすると，定理の仮定より

$$\varlimsup_{n\to\infty} s_n \leqq \varlimsup_{n\to\infty} \sigma_n = s.$$

次に $\nu < n-1$ に対し

$$s_n = \sigma_{n-\nu-1} + \frac{n+1}{\nu+1}(\sigma_n - \sigma_{n-\nu-1}) + \frac{1}{\nu+1}\{\nu u_n + (\nu-1)u_{n-1} + \cdots + u_{n-\nu+1}\}$$

なるゆえ，

$$\begin{aligned} s_n &\geqq \sigma_{n-\nu-1} - \frac{n+1}{\nu+1}\omega_{n-\nu-1} - \frac{H\nu^2}{(\nu+1)(n-\nu+1)} \\ &\geqq \sigma_{n-\nu-1} - \frac{n+1}{\nu+1}\omega_{n-\nu-1} - \frac{H(\nu+1)}{n-\nu+1}. \end{aligned}$$

ここで $\nu = \nu(n) = [\varepsilon n]$，ただし $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$，として $n \to \infty$ とすると

$$\varliminf_{n\to\infty} s_n \geqq \varliminf_{n\to\infty} \sigma_n - 2H\varepsilon = s - 2H\varepsilon,$$

ここで ε は任意に小さくとれるから

$$\varliminf_{n\to\infty} s_n \geqq s.$$

前の式と合わせて $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ が得られる．　　（証明終）

以上の準備をした上で定理 19.4 を証明しよう．仮定 (19.6) より

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\nu u_\nu \geqq -H,$$

よって定理 19.7 より

$$(C, 1)\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s.$$

ゆえに定理 19.8 より

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s. \qquad \text{（定理 19.4 の証明終）}$$

このように定理 19.4 の大層長い証明を述べたが，ウィーラントによるこの定理の極めて簡潔な証明がある．それを次に述べよう．

定理 19.4 の別証明.

$s=0$, $u_0=0$, $u_n \geqq -\dfrac{1}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$ として証明しても一般性を失わない．$0<x<1$ で定義された実数値関数 $g(x)$ の次のような族を G とする:

（i）　$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n g(x^n)$ は $0<x<1$ で収束する．

（ii）　$\lim_{x\to 1-0} f(x) = 0$.

定理の仮定 $A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 0$ は $x \in G$ と書ける．いま

$$g^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{ただし } 0 \leqq x < \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \text{ただし } \dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

とおくと，定理の終結は $g^*(x) \in G$ と書ける．何となれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n g^*(x^n) = \sum_{2x^n \geqq 1} u_n = \sum_{n=1}^{N} u_n = s_N, \quad \text{ただし } N = \left[\frac{\log 2}{\log \dfrac{1}{x}}\right],$$

なるゆえ．

G についての次の性質は容易にわかる:

(iii)　もし $g(x) \in G$ ならば $g(x^k) \in G$ $(k=1, 2, \cdots)$.

(iv)　もし $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_k(x) \in G$ で，$t_1, t_2, \cdots, t_k$ を任意の定数とすれば $\sum_{n=1}^{k} t_n g_n(x) \in G$.

仮定より $x \in G$ であるから，定数項が 0 であるような x の任意の多項式は G に属する．

補助定理 19.9. $0<x<1$ で定義された関数 $g(x)$ は (i) を満足し，かつ任意の $\varepsilon>0$ に対して，定数項が 0 である次のような二つの多項式 $p_1(x)$, $p_2(x)$ が存在すると仮定する:

$$p_1(x) \leqq g(x) \leqq p_2(x) \qquad (0<x<1),$$

かつ $\dfrac{p_2(x)-p_1(x)}{x(1-x)}=q(x)$ は多項式で $\displaystyle\int_0^1 q(x)\,dx<\varepsilon$.

このようなときには $g(x)$ は (ii) を満足する，すなわち $g(x) \in G$ である．

証明. いま $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n g(x^n)$ とすると

$$\begin{aligned}
f(x)-\sum_{n=1}^{\infty} u_n p_1(x^n) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n\{g(x^n)-p_1(x^n)\} \\
&\geqq -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\{g(x^n)-p_1(x^n)\} \\
&\geqq -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\{p_2(x^n)-p_1(x^n)\} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1-x^n)x^n q(x^n) \\
&\geqq -\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n q(x^n) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n \sum_{i=0}^{r} b_i x^{ni} \\
&= -\sum_{i=0}^{r} b_i \frac{(1-x)x^{i+1}}{1-x^{i+1}} \qquad (0<x<1)
\end{aligned}$$

である．この最後の式は $x \to 1-0$ とすると

$$-\sum_{i=0}^{r} \frac{b_i}{i+1} = -\int_0^1 q(x)\,dx > -\varepsilon$$

に近づく．他方 $p_1(x) \in G$ であるから $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n p_1(x^n)=0$ である．ゆえに適当に $\delta>0$ をとると，$1-\delta<x<1$ に対して $f(x)>-2\varepsilon$ である．同様にして $\sum_{n=1}^{\infty} u_n p_2(x^n)-f(x)$ を考えることにより，$1-\delta<x<1$ に対して $f(x)<2\varepsilon$ である．ゆえに $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=0$ である．　(補助定理の証明終)

さて $\sum_{n=1}^{\infty} u_n g^*(x^n) = \sum_{2x^n \geqq 1} u_n$ ゆえ，$g^*(x)$ は条件（i）を満足する．また $g^*(x)$ が補助定理の条件をすべて満足することは次のようにしてわかる：関数

$$h(x) = \frac{g^*(x) - x}{x(1-x)}$$

は $0 \leqq x \leqq 1$ において区分的連続関数であるから，補助定理 19.6 により

$$P_1(x) < h(x) < P_2(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1),$$

$$\int_0^1 \{P_2(x) - P_1(x)\} dx < \varepsilon$$

であるような二つの多項式 $P_1(x)$, $P_2(x)$ が存在する．いま

$$p_i(x) = x + x(1-x) P_i(x) \qquad (i = 1, 2)$$

とおくと，この $p_1(x)$, $p_2(x)$ は補助定理の条件を満足する．ゆえに $g^*(x) \in G$ である．　　　　（定理 19.4 の別証明終）

アーベル総和法に関するタウバー型条件 (19.6) はさらに繊細となる．たとえば，サースは次のように一般化した：

$$\text{ある } p > 1 \text{ に対して} \tag{19.12}$$
$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^p (|u_\nu| - u_\nu)^p = O(n) \qquad (n \to \infty),$$

あるいはさらに進めて

$$\omega(\delta) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=n+1}^{n(1+\delta)} (|u_\nu| - u_\nu), \tag{19.13}$$
$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta) = 0$$

などとなる．しかし本書ではこれらには立入らない．

アーベル総和法を一般化した (A, λ_n)-総和法についてはすでに§15 で述べた．この総和法に関するタウバー型定理は，ハーディ，リットルウッドその他の人々により，アーベル総和法のタウバー型定理に関する研究と並行して進められた．たとえば

定理 19.10. **（ハーディ・リットルウッドの定理）** 数列

$$0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \qquad \lambda_n \to \infty$$

は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$$

を満足し，(A,λ_n)-$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ とする．もし

$$u_n\geqq -H\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \qquad (n=1,\ 2\cdots)$$

ならば $\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ である．

§20.　フーリエ変換

ウィーナーのタウバー型定理をピット，ウィダー [21]，ハーディ [10] に従って述べよう．そのためにフーリエ変換に関する基本的定理を述べる．ルベーグ積分についての諸性質はすでに知られているとしよう．（たとえばティチュマルシュ [20] 参照）

定理 20.1.　任意の関数 $g(t)\in L(-\infty,\ \infty)$ に対して，

$$G(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)e^{itu}du \qquad (-\infty<t<\infty) \tag{20.1}$$

は存在して，$G(t)$ は有界，かつ連続である．

証明.　$G(t)$ の存在はルベーグ積分の定義より明らかである．

$$|G(t)|\leqq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|g(u)|du<\infty$$

より$G(t)$ は有界である．$G(t)$ が連続であることを示すには，$h>0$ とし

$$\begin{aligned}|G(t+h)-G(t)|&\leqq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|g(u)e^{itu}(e^{ihu}-1)|du\\&\leqq\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|g(u)|\left|\sin\frac{hu}{2}\right|du\\&\leqq\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{-R}+\int_{R}^{\infty}\right)|g(u)|du+\frac{hR}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}|g(u)|du\\&=I+J\end{aligned}$$

とおく．任意の $\varepsilon>0$ に対して R を十分大きくすると $I<\varepsilon$ とできる．次に h を十分小さくすると $J<\varepsilon$ とできる．ゆえに

$$|G(t+h)-G(t)|<2\varepsilon^{1)}$$

である．$h<0$ のときも同様である．　　　　　　　　　　　（証明終）

1)　$G(t)$ は $(-\infty,\ \infty)$ で一様連続である．

$G(t)$ を $g(t)$ の**フーリエ変換**といい，

$$G(t) \sim g(t)$$

と書くことにする．

定理 20.2. $g(t) \in L(-\infty, \infty)$ とし，そのフーリエ変換を $G(t)$ とする．

$$\varphi(y) = \varphi_t(y) = g(t+y) + g(t-y) - 2g(t)$$

とおくとき，

$$\Phi(x) = \Phi_t(x) = \int_0^x |\varphi_t(y)|\,dy = o(x) \qquad (x \to 0) \tag{20.2}$$

であるような t に対して

$$(C, 1)\text{-}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(u)\,e^{-itu}du = g(t),$$

すなわち

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|u|}{\lambda}\right)G(u)\,e^{-itu}du = g(t)$$

である．ルベーグ積分の性質より (20.2) はほとんどすべての t に対して成り立つ．

証明． フビニの定理より

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|u|}{\lambda}\right)e^{-itu}du\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,e^{iuy}dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|u|}{\lambda}\right)e^{-iu(t-y)}du.$$

ここで部分積分により

$$\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|u|}{\lambda}\right)e^{-iu(t-y)}du = \frac{2}{\lambda(t-y)^2}\{1-\cos\lambda(t-y)\}$$

であるから，

$$I = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(t-y)\,\frac{1-\cos\lambda y}{\lambda y^2}dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\{g(t+y)+g(t-y)\}\,\frac{1-\cos\lambda y}{\lambda y^2}dy$$

となる．

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\lambda y}{\lambda y^2}dy = \int_0^{\infty}\frac{\sin^2 y}{y^2} = \frac{\pi}{2}$$

なるゆえ

$$I-g(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\{g(t+y)+g(t-y)-2g(t)\}\frac{1-\cos\lambda y}{\lambda y^2}dy$$

である．よって

$$\begin{aligned}|I-g(t)|&\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^\infty|\varphi(y)|\frac{1-\cos\lambda y}{\lambda y^2}dy\\&=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{1/\lambda}+\int_{1/\lambda}^{\delta}+\int_\delta^\infty\right\}|\varphi(y)|\frac{1-\cos\lambda y}{\lambda y^2}dy\\&=\frac{1}{\pi}\{J_1+J_2+J_3\}\end{aligned}$$

とおく．ここで $\delta>0$ は，任意に $\varepsilon>0$ を与えるとき，$0\leqq y\leqq\delta$ なる y に対して $\Phi(y)\leqq\varepsilon y$ であるような数とする．

$$0\leqq\frac{1-\cos\lambda y}{\lambda y^2}\leqq\frac{2}{\lambda y^2},$$

$$0\leqq\frac{1-\cos\lambda y}{\lambda y^2}=\left(\frac{\sin\frac{\lambda y}{2}}{\frac{\lambda y}{2}}\right)^2\frac{\lambda}{2}\leqq\frac{\lambda}{2}$$

なるゆえ

$$J_1\leqq\frac{\lambda}{2}\int_0^{1/\lambda}|\varphi(y)|dy=\frac{\lambda}{2}\Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)=o(1)\qquad(\lambda\to\infty),$$

部分積分により

$$J_2=\frac{2}{\lambda}\int_{1/\lambda}^{\delta}|\varphi(y)|\frac{dy}{y^2}<5\varepsilon\qquad(\lambda\to\infty),$$

$g(t)\in L(-\infty,\infty)$ なるゆえ

$$J_3=\frac{2}{\lambda}\int_\delta^\infty|\varphi(y)|\frac{dy}{y^2}=o(1)\qquad(\lambda\to\infty)$$

である．ε は任意であるから $|I-g(t)|=o(1)\quad(\lambda\to\infty)$ である．

(証明終)

系 1. もし $g(t), G(t)\in L(-\infty,\infty)$ ならば，g の連続点 t では

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty G(u)e^{-itu}du$$ [2]

である．

---

2) この式を**フーリエ逆変換**という．

系 2. もし $G(t)=0\ (-\infty<t<\infty)$ ならば，ほとんどすべての点で $g(t)=0$ である．

これはフーリエ変換の一意性を示す．

定理 20.3. もし $g(t),\ r(t)\in L(-\infty,\ \infty)$ ならば，

$$h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}r(u)g(t-u)\,du\in L(-\infty,\ \infty)$$

であって，かつ $g(t),\ r(t),\ h(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $G(t),\ R(t),\ H(t)$ とすれば，

$$H(t)=R(t)G(t).$$

証明.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt\leqq\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}|r(u)g(t-u)|\,du$$
$$\leqq\int_{-\infty}^{\infty}|r(u)|\,du\int_{-\infty}^{\infty}|g(t-u)|\,dt<\infty$$

なるゆえ，$h(t)\in L(-\infty,\ \infty)$ は明らか．定理の後半は

$$H(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h(v)e^{itv}dv=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itv}dv\int_{-\infty}^{\infty}r(u)g(v-u)\,du$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(u)e^{itu}du\int_{-\infty}^{\infty}g(v-u)e^{it(v-u)}dv$$
$$=R(t)G(t)$$

より明らか．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

$h(t)$ を $r(t)$ と $g(t)$ の**重畳**という．

定理 20.4. もし $P(t)\sim p(t),\ Q(t)\sim q(t)$ ならば，

（i） $P(t-c)\sim e^{-ict}p(t)$,

（ii） $P(t-c)Q(t)\sim\dfrac{e^{-ict}}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}p(t-u)q(u)e^{icu}du$,

（iii） $P(t-c)\{Q(t)-Q(c)\}$

$$\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\{p(t-u)-p(t)\}q(u)e^{ic(u-t)}du.$$

証明. （i）はフーリエ変換の定義より明らか．（ii）は（i）と前定理より明らか．（iii）は

$$P(t-c)Q(c)=\frac{P(t-c)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}q(u)e^{icu}du$$

$$\sim\frac{e^{-ict}p(t)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}q(u)e^{icu}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}p(t)q(u)e^{ic(u-t)}du$$

と（ii）より明らか．　（証明終）

$L(-\infty,\infty)$ の関数のフーリエ変換の全体を U で表すことにする．$g(t)\in L(-\infty,\infty)$ のフーリエ変換を $G(t)$ とし，

$$\|G\|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|g(u)|du$$

とおくと，次の定理が得られる．

定理 20.5.　もし $G_1(t),\ G_2(t)\in U$ ならば

$$G_1(t)+G_2(t)\in U,\qquad G_1(t)G_2(t)\in U$$

であって，かつ

$$\|G_1+G_2\|\leqq\|G_1\|+\|G_2\|,\qquad \|G_1G_2\|\leqq\|G_1\|\cdot\|G_2\|$$

である．

証明．　$G_1(t)+G_2(t)$ については定理は明らか．$G_1(t)G_2(t)$ は定理 20.3 より

$$h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g_1(t-u)g_2(u)du$$

のフーリエ変換であるから，U に属する関数であることは明らか．さらに

$$\|G_1G_2\|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt\leqq\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}|g_1(t-u)g_2(u)|du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|g_2(u)|du\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|g_1(t-u)|dt$$

$$=\|G_1\|\cdot\|G_2\|$$

である．

定理 20.6.　もし $G_1(t),\ G_2(t)\in U$ で，かつ $\|G_2\|=d<1$ ならば，$H(t)=\dfrac{G_1(t)}{1+G_2(t)}\in U$ で $\|H\|\leqq\dfrac{\|G_1\|}{1-d}$ である．

証明．　$|G_2(t)|\leqq\|G_2\|=d<1$ なるゆえ，いま

$$H(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nG_1(t)\{G_2(t)\}^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nH_n(t)$$

とおくと，前定理より $H_n(t)\in U$. いま $H_n(t)$ は $h_n(t)$ のフーリエ変換とすると，

$$\sum_{n=i}^{j}(-1)^n H_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=i}^{j}(-1)^n h_n(u)e^{itu}du$$

である．また前定理より

$$\|H_n\|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|h_n(u)|du\leqq\|G_1\|\{\|G_2\|\}^n=d^n\|G_1\|,$$

さらに

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{n=i}^{j}(-1)^n h_n(u)\right|du\leqq\sum_{n=i}^{j}\|H_n\|\leqq\|G_1\|\sum_{n=i}^{j}d^n.$$

この上式右辺は，$i, j\to\infty$ とすると 0 に近づく．ルベーグ積分に関する定理より，適当に $h(t)\in L(-\infty, \infty)$ をとると

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(u)-\sum_{n=0}^{j}(-1)^n h_n(u)\right|du=0,$$

かつ

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)e^{itu}du&=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{j}(-1)^n h_n(u)e^{itu}du\\&=\lim_{j\to\infty}\sum_{n=0}^{j}(-1)^n G_1(t)\{G_2(t)\}^n\\&=\frac{G_1(t)}{1+G_2(t)}=H(t)\end{aligned}$$

となる．ゆえに $H(t)\in U$. さらに

$$\|H\|=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{n=0}^{j}(-1)^n h_n(u)\right|du\leqq\|G_1\|\sum_{n=0}^{\infty}d^n=\frac{\|G_1\|}{1-d}.$$

（証明終）

いま

$$p(t)=\begin{cases}1-|p|, & \text{ただし}\quad |t|\leqq 1,\\ 0, & \text{ただし}\quad |t|>1\end{cases}$$

とすると，

$$P(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1-|u|)e^{itu}du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}t}\right)^2$$

であるから，$p(t), P(t)\in L(-\infty, \infty)$．$P(t), p(t)$ は互いのフーリエ変換となっているから $P(t), p(t)\in U$ である．

また任意の $\lambda>0$ に対して

$$(20.3)\quad k_\lambda(t)=p\left(\frac{t}{2\lambda}\right),\qquad K_\lambda(t)=2\lambda P(2\lambda t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin^2\lambda t}{\lambda t^2}$$

とおくと，$K_\lambda(t), k_\lambda(t)$ は互いのフーリエ変換となっているゆえ $K_\lambda(t)$, $k_\lambda(t)\in U$ である．

定理 20.7. いま任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$q_\varepsilon(t)=\begin{cases}1, & \text{ただし } |t|\leqq\varepsilon,\\ 2-\dfrac{|t|}{\varepsilon}, & \text{ただし } \varepsilon\leqq|t|\leqq2\varepsilon,\\ 0, & \text{ただし } |t|\geqq2\varepsilon\end{cases}$$

とおくと（下図参照），$q_\varepsilon(t)$ のフーリエ変換は

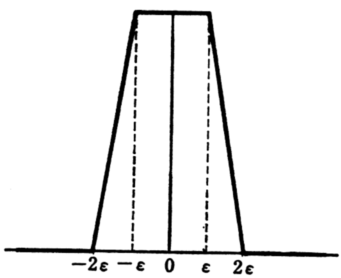
$$Q_\varepsilon(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\varepsilon t-\cos2\varepsilon t}{\varepsilon t^2}$$

で，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|Q_\varepsilon(t)|\,dt\leqq3$$

である．ゆえに $q_\varepsilon(t)\in U$ である．さらに y を固定すると

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{\infty}|Q_\varepsilon(t-y)-Q_\varepsilon(t)|\,dt=0.$$



証明. $q_\varepsilon(t)=2k_\varepsilon(t)-k_{\frac{1}{2}\varepsilon}(t)$ であるから，上述の結果より

$$Q_\varepsilon(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2\sin^2\varepsilon t-2\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon t}{\varepsilon t^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\varepsilon t-\cos2\varepsilon t}{\varepsilon t^2}.$$

次に

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|Q_\varepsilon(t)|\,dt$$

$$\leqq\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin^2\varepsilon t}{\varepsilon t^2}dt+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\varepsilon t}{\varepsilon t^2}dt\right)=3.$$

いま

$$C(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos t-\cos 2t}{t^2}$$

とおくと $Q_\varepsilon(t)=\varepsilon C(\varepsilon t)$，かつ $C(t)\in L(-\infty,\infty)$ である．ゆえにルベーグ積分に関する定理より

$$\int_{-\infty}^{\infty}|Q_\varepsilon(t-y)-Q_\varepsilon(t)|dt=\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}|C(\varepsilon t-\varepsilon y)-C(\varepsilon t)|dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}|C(u-\varepsilon y)-C(u)|du\to 0$$

（ただし $\varepsilon\to 0$）． （証明終）

§ 21. ウィーナーのタウバー型定理

ウィーナーは，色々の総和法に関するタウバー型定理を特別の場合として含む極めて一般的なタウバー型定理を証明した．定理 19.5 より

(21.1) 「もし A-$\lim s_n=s$ で $s_n=O(1)$ ならば $(C, 1)$-$\lim s_n=s$.」

この定理は次のように述べることができる．

「もし $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}s_n e^{-n/x}\right\}=s$ で $s_n=O(1)$ ならば $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{x}\sum_{n\leqq x}s_n\right\}=s$.」

級数に関するこの定理を積分で類似すると

「もし $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{x}\int_0^\infty F(t)e^{-t/x}dt\right\}=l$ で $F(t)=O(1)$ ならば

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,dt\right\}=l.」^{1)}$$

となる．いま

$$(21.2)\qquad \frac{1}{x}\int_0^\infty G\left(\frac{t}{x}\right)F(t)\,dt\to l\int_0^\infty G(t)\,dt \qquad (x\to\infty)$$

であることを $P_G(F)$ と書くことにし，

$$G_1(t)=e^{-t},\qquad G_2(t)=\begin{cases}1 & (0\leqq t\leqq 1),\\ 0 & (t>1)\end{cases}$$

1) もし $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt\right\}=l$ ならば $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{x}\int_0^\infty F(t)e^{-t/x}dt\right\}=l$ であることは $\int_0^\infty F(t)e^{-t/x}dt$ の部分積分よりわかる．（$l=0$ として証明しても一般性を失わない）

とおくと，$\int_0^\infty G_1(t)\,dt=\int_0^\infty G_2(t)\,dt=1$ であるから，上述の積分の形の表現は，

(21.3)　「もし $P_{G_1}(F)$ で $F(t)=O(1)$ ならば $P_{G_2}(F)$」

と書くことができる．

いま変換

$$t=e^\tau,\quad x=e^\xi,\quad F(e^\tau)=f(\tau),\quad e^\tau G(e^\tau)=g(-\tau)$$

とおくと，

$$\frac{1}{x}\int_0^\infty G\left(\frac{t}{x}\right)F(t)\,dt=\int_{-\infty}^\infty e^{\tau-\xi}G(e^{\tau-\xi})F(e^\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^\infty g(\xi-\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$\int_0^\infty G(t)\,dt=\int_{-\infty}^\infty g(-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^\infty g(\tau)\,d\tau$$

となる．ここで ξ の代りに x，τ の代りに t と書くと (21.2) は

$$\int_{-\infty}^\infty g(x-t)f(t)\,dt\to l\int_{-\infty}^\infty g(t)\,dt\qquad(x\to\infty)$$

となる．これを $P_g(f)$ と書くことにすると (21.3) は

(21.4)　「もし $P_{g_1}(f)$ で $f(t)=O(1)$ ならば $P_{g_2}(f)$」[2)]

となる．

このようにして (21.1) のタウバー型定理から出発して (21.4) なるタウバー型定理の一つの一般的な型が得られた．それでは g_1, g_2 にどのような条件があれば実際に (21.4) が成り立つであろうか．ウィーナーは，g_1 がある特別な条件を満足するならば，g_2 にはほとんど条件なしに (21.4) が成り立つことを証明した．それではどのようにして g_1 の条件を見いだすことができるであろうか．

いま $g(t)\in L(-\infty,\infty)$ が与えられたとき，r_0, r_1, … を定数とし

$$h(t)=\sum_{n=0}^m r_n g(t-a_n)$$

とおくと，「もし $P_g(f)$ ならば $P_h(f)$」であることは容易にわかる．それで上の $h(t)$ の代りに

2)　一般にはもはや「もし $P_{g_2}(f)$ ならば $P_{g_1}(f)$」は成立しない．しかし (21.4) は広い意味ではタウバー型定理と考える．また (21.4) において $f(t)=O(1)$ を別なタウバー型条件 $T(f)$ でおきかえることも考えられる．

(21.5)
$$h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}r(u)g(t-u)du$$

としても同様な関係が成り立つことが暗示される．ここで，$g(t)\in L(-\infty,\infty)$ が与えられたとき，任意の $h(t)\in L(-\infty,\infty)$ は $r(t)\in L(-\infty,\infty)$ を使って (21.5) の形で表されるであろうか，という疑問がおこる．

$r(t)\in L(-\infty,\infty)$ とし，$r(t)$ のフーリエ変換を $R(t)$，すなわち

$$R(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}r(u)e^{itu}du$$

とする．定理 20.3 より，(21.5) で定義される $h(t)$ はこのとき $L(-\infty,\infty)$ に属し，かつ $g(t)$, $h(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $G(t)$, $H(t)$ とすると，$H(t)=R(t)G(t)$ なる関係がある．

$g(t)$, $h(t)$ があらかじめ与えられているとき，(21.5) を満足するような $r(t)$ を求めるには，$R(t)=H(t)/G(t)$ をそのフーリエ変換とするような関数を求めればよい（フーリエ逆変換を参照）．このようなことが可能であるためには

$$G(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)e^{itu}du\neq 0$$

でなければならない．いま，$L(-\infty,\infty)$ の関数で，そのフーリエ変換がどのような t に対しても 0 とならないような関数の全体を W で表し，**ウィーナー族**という．

さらに関数 $f(x)$ が**緩振動関数**[3] であるとは，

(21.6)
$$y>x,\quad x\to\infty,\quad y-x\to 0$$

のとき

$$f(y)-f(x)\to 0$$

なるときをいう．実数値をとる関数 $f(x)$ が**緩減少関数**[3] であるとは，(21.6) のとき

$$\underline{\lim}\{f(y)-f(x)\}\geqq 0$$

なるときをいう．

3) もし $f'(x)=O(1)$ ならば $f(x)$ は緩振動関数で，$f'(x)>-H$ ならば $f(x)$ は緩減少関数である．

ウィーナーの基本定理は次のようなものである．

定理 21.1.　$g(t)\in W$ と $h(t)\in L(-\infty, \infty)$ が与えられたとき，もし $f(t)=O(1)$ で $P_g(f)$ ならば $P_h(f)$ である．

この定理を次の**ピットの定理**より導く．

定理 21.2.　$g(t)\in W$ が与えられたとき，もし $f(t)$ が有界な緩振動関数または実数値をとる有界な緩減少関数で，$P_g(f)$ ならば $f(x)\to l$ $(x\to\infty)$ である．

これらの定理を証明するために次の二つの定理を証明する．

定理 21.3.　もし $g(t)\in W$, $h(t)\in L(-\infty, \infty)$, かつ $h(t)$ のフーリエ変換 $H(t)$ は $|t|>2\lambda>0$ に対して $H(t)=0$ であるならば，$H(t)/G(t)\in U$ である．特に $H(t)=k_\lambda(t)$ のとき定理は成り立つ（記号は (20.3) 参照）．

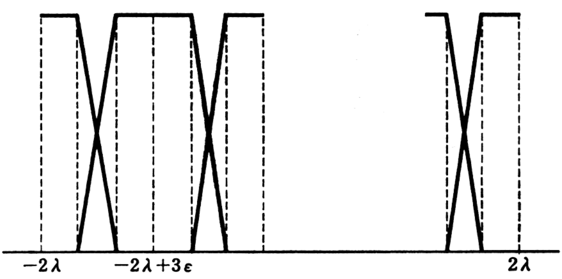
証明.　閉区間 $[-2\lambda, 2\lambda]$ を N 等分し，その分点を

$$t_0=-2\lambda,\ t_1=-2\lambda+3\varepsilon,\ \cdots,\ t_n=-2\lambda+3n\varepsilon,\ \cdots,\ t_N=2\lambda$$

とする．ここで $\varepsilon=4\lambda/3N$ とする．$|t|\leqq 2\lambda$ に対して

$$\sum_{n=0}^{N} q_\varepsilon(t-t_n)=1$$

である（下図参照）．



ゆえに $|t|\leqq 2\lambda$ に対して

$$\frac{H(t)}{G(t)}=\sum_{n=0}^{N}\frac{q_\varepsilon(t-t_n)H(t)}{G(t)}=\sum_{n=0}^{N}\chi_n(t)$$

とおく．仮定より $G(t)\neq 0$, $H(t)=0$ $(|t|>2\lambda)$ であるから，上式はすべての t に対して成り立つ．定理 20.5 により，すべての n に対して $\chi_n(t)\in U$ であることを示せば定理の証明は終る．

$\varepsilon>0$ を十分小さくする．もし $|t-t_n|\leqq 2\varepsilon$ ならば $q_{2\varepsilon}(t-t_n)=1$ であるから，このような t に対しては

$$G(t)=G(t_n)+\{G(t)-G(t_n)\}q_{2\varepsilon}(t-t_n)$$

である．また $|t-t_n|>2\varepsilon$ に対しては

$$q_\varepsilon(t-t_n)H(t)=0$$

である．ゆえに

$$\chi_n(t)=\frac{q_\varepsilon(t-t_n)H(t)}{G(t_n)+\{G(t)-G(t_n)\}q_{2\varepsilon}(t-t_n)}=\frac{G_1(t)G_2(t)}{1+G_3(t)}$$

とおく．ここで

$$G_1(t)=\frac{q_\varepsilon(t-t_n)}{G(t_n)},\quad G_2(t)=H(t),\quad G_3(t)=\frac{G(t)-G(t_n)}{G(t_n)}q_{2\varepsilon}(t-t_n)$$

とする．定理 20.5, 20.7 より $G_1(t)$, $G_2(t)$, $G_3(t)\in U$ である．ゆえに十分小さな ε に対して

$$\|G_3\|=\frac{1}{|G(t_n)|}\|\{G(t)-G(t_n)\}q_{2\varepsilon}(t-t_n)\|<1$$

であることを示せば，定理 20.6 より $\chi_n(t)\in U$ がわかる．

定理 20.4 (iii) より

$$\gamma(t)\equiv\{G(t)-G(t_n)\}q_{2\varepsilon}(t-t_n)$$

は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\{Q_{2\varepsilon}(t-u)-Q_{2\varepsilon}(t)\}g(u)e^{it_n(u-t)}du$$

のフーリエ変換である．ゆえに

$$\begin{aligned}\|\gamma\|&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\left|\int_{-\infty}^{\infty}\{Q_{2\varepsilon}(t-u)-Q_{2\varepsilon}(t)\}g(u)e^{it_n(u-t)}du\right|\\&\leqq\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}|Q_{2\varepsilon}(t-u)-Q_{2\varepsilon}(t)||g(u)|du\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|g(u)|du\int_{-\infty}^{\infty}|Q_{2\varepsilon}(t-u)-Q_{2\varepsilon}(t)|dt\end{aligned}$$

となる．定理 20.7 より $\int_{-\infty}^{\infty}|Q_{2\varepsilon}(t-u)-Q_{2\varepsilon}(t)|dt$ は有界で，また u を任意に固定して $\varepsilon\to 0$ とすると 0 に近づく．$g(u)\in L(-\infty,\infty)$ であるから，$\varepsilon\to 0$ のとき $\|\gamma\|\to 0$ となる．

$G(t)$ は連続で，かつ 0 とはならないから

$$|G(t)|\geqq\mu>0 \qquad (-2\lambda\leqq t\leqq 2\lambda)$$

であるような μ が存在する．ゆえに

$$\|G_3\|\leqq\frac{\|\gamma\|}{\mu}$$

となり，この右辺は $\varepsilon\to 0$ のとき 0 に近づく．ゆえに ε を十分小さくとれば $\|G_3\|<1$ となる．定理 20.6 より $\chi_n(t)\in U$ がわかり，さらに $H(t)/G(t)\in U$ がわかる．　(証明終)

定理 21.4.　もしすべての $\lambda>0$，またはある任意に大きな $\lambda>0$ に対して

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}K_\lambda(x-t)f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\lambda(x-t)}{\lambda(x-t)^2}f(t)dt\to l \qquad (x\to\infty)$$

であって，かつ $f(t)$ は有界緩振動関数または実数値をとる有界緩減少関数であるならば，$x\to\infty$ のとき $f(x)\to l$ である．

証明．　$l=0$ と仮定しても一般性を失わない．$f(t)$ は実数値をとる有界緩減少関数として証明しよう．もし $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ が成立しないと仮定すると，適当に $\delta>0$ をえらぶと，ある任意に大きな x に対して

$$f(x)>\delta \quad \text{または} \quad f(x)<-\delta$$

である．いま $f(x)>\delta$ と仮定しよう．仮定より $y>x$，$x\to\infty$，$y-x\to 0$ のとき

$$\underline{\lim}\{f(y)-f(x)\}\geqq 0$$

であるから，ある任意に大きな $x_0=x_0(\delta)$ と，ある $\eta=\eta(\delta)>0$ をとると

$$f(t)\geqq\frac{1}{2}\delta \qquad (x_0\leqq x\leqq t\leqq x+2\eta)$$

である．もし $\xi=x+\eta$，$|f(x)|\leqq M$ とすれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\lambda(\xi-t)}{\lambda(\xi-t)^2}f(t)dt &\geqq\frac{\delta}{2\pi}\int_{\xi-\eta}^{\xi+\eta}\frac{\sin^2\lambda(\xi-t)}{\lambda(\xi-t)^2}dt\\ &\quad-\frac{M}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{\xi-\eta}+\int_{\xi+\eta}^{\infty}\right)\frac{\sin^2\lambda(\xi-t)}{\lambda(\xi-t)^2}dt\\ &=\frac{\delta}{\pi}\int_0^{\eta}\frac{\sin^2\lambda u}{\lambda u^2}du-\frac{2M}{\pi}\int_{\eta}^{\infty}\frac{\sin^2\lambda u}{\lambda u^2}du\end{aligned}$$

である．$\lambda\to\infty$ とすると，最後の行の第1式は $\frac{1}{2}\delta$ に近づき，第2式は 0 に近づく．ゆえに十分大きなすべての λ と，ある任意に大きな ξ に対して

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\lambda(\xi-t)}{\lambda(\xi-t)^2}f(t)dt>\frac{1}{4}\delta,$$

したがって

$$\varlimsup_{x\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\lambda(x-t)}{\lambda(x-t)^2}f(t)dt>0$$

である．これは定理の仮定に反する．$f(x)<-\delta$ のときも同様である．

(証明終)

前二定理を使いピットの定理 21.2 を証明しよう．

$f(x)$ は実数値をとる有界な緩減少関数で，$l=0$ と仮定してよい．定理 21.3 より $k_\lambda(t)/G(t)\in U$ である．すなわち

$$\frac{k_\lambda(t)}{G(t)}\sim r_\lambda(t),\qquad r_\lambda(t)\in L(-\infty,\infty)$$

であるような関数 $r_\lambda(t)$ が存在する．定理 20.3 より

$$k_\lambda(t)=\frac{k_\lambda(t)}{G(t)}G(t)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}r_\lambda(u)g(t-u)du$$

である．ゆえに定理 20.2 のフーリエ変換の一意性より，ほとんどすべての x に対して

$$K_\lambda(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}r_\lambda(u)g(x-u)du$$

である．したがってフビニの定理より

$$\rho(x)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}K_\lambda(x-t)f(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}r_\lambda(u)g(x-t-u)du$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}r_\lambda(u)du\int_{-\infty}^{\infty}g(x-t-u)f(t)dt$$

である．$g(t)\in L(-\infty,\infty)$ で $f(t)$ は有界ゆえ，$\int_{-\infty}^{\infty}g(x-t-u)f(t)dt$ は有界であって，かつ定理の仮定 $P_g(f)$ より，もし u を任意に固定して $x\to\infty$ とすると 0 に近づく．$r_\lambda(t)\in L(-\infty,\infty)$ であるから，任意の λ に対して $\lim_{x\to\infty}\rho(x)=0$ である．ゆえに定理 21.4 より $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ である．

(定理 21.2 の証明終)

このピットの定理 21.2 を使いウィーナーの定理 21.1 を証明しよう．

$l=0$ と仮定してよい．いま

$$m(x)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x-t)f(t)dt$$

とおくと，$h(t)\in L(-\infty, \infty)$ で $f(t)$ は有界関数ゆえ $m(x)$ は有界関数である．また $|f(x)|\leqq M$ とすると

$$|m(y)-m(x)|\leqq M\int_{-\infty}^{\infty}|h(y-t)-h(x-t)|dt$$
$$=M\int_{-\infty}^{\infty}|h(y-x-u)-h(-u)|du$$

であるから，ルベーグ積分に関する定理より $y>x$，$x\to\infty$，$y-x\to 0$ のとき $m(y)-m(x)\to 0$ である．すなわち $m(x)$ は緩振動関数である．

またフビニの定理より

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(x-t)m(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(x-t)dt\int_{-\infty}^{\infty}h(t-u)f(u)du$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)du\int_{-\infty}^{\infty}g(x-t)h(t-u)dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)du\int_{-\infty}^{\infty}g(x-u-w)h(w)dw$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(w)dw\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u-w)du$$

である．ここで $g(u)\in L(-\infty, \infty)$ で $f(u)$ は有界関数であるから，

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u-w)du$$

は有界で，かつ定理の仮定 $P_g(f)$ より，w を任意に固定して $x\to\infty$ とすると 0 に近づく．$h(w)\in L(-\infty, \infty)$ であるから，$x\to\infty$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(x-t)m(t)dt\to 0$$

である．ここで $m(x)$ は有界で緩振動関数であるから，ピットの定理 21.2 より $\lim_{x\to\infty}m(x)=0$ である．すなわち $P_h(f)$ である．

（定理 21.1 の証明終）

アーベル総和法に関するリットルウッドのタウバー型定理 19.3 をウィーナーのタウバー型定理を使って証明しよう．すなわち

定理 21.5.　もし $A-\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ で，かつ

$$n|u_n|\leqq H \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

ならば，$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ である．

証明.
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n \qquad (0\leqq x<1),$$
$$s(x)=\sum_{n=0}^{[x]}u_n$$
とおくと,
$$\begin{aligned}|s(x)-f(e^{-\frac{1}{x}})|&=\left|\sum_{n=0}^{[x]}u_n(1-e^{-\frac{n}{x}})-\sum_{n=[x]+1}^{\infty}u_ne^{-\frac{n}{x}}\right|\\&\leqq\sum_{n=1}^{[x]}\frac{H}{n}\frac{n}{x}+\sum_{n=[x]+1}^{\infty}\frac{H}{n}e^{-\frac{n}{x}}\\&\leqq 2H+H\int_{[x]}^{\infty}e^{-\frac{t}{x}}\frac{dt}{t}\\&\leqq 3H+H\int_1^{\infty}e^{-t}\frac{dt}{t}\end{aligned}$$
となる．この最後の式は定数である．仮定より $f(e^{-\frac{1}{x}})$ は $0\leqq x<\infty$ に対して有界であるから $s(x)$ も有界である．

また
$$\begin{aligned}f(e^{-x})&=\sum_{n=0}^{\infty}u_ne^{-nx}=\int_{-0}^{\infty}e^{-tx}ds(t)\\&=\int_0^{\infty}xe^{-tx}s(t)dt\end{aligned}$$
であるから，仮定より
$$\begin{aligned}s&=\lim_{x\to+0}\int_0^{\infty}xe^{-tx}s(t)dt\\&=\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi}e^{-e^{\tau-\xi}}s(e^{\tau})e^{\tau}d\tau\\&=\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi-\tau)s(e^{\tau})d\tau\end{aligned}$$
である．ここで
$$g(\xi)=e^{-\xi}e^{-e^{-\xi}}$$
とおく．
$$\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)d\tau=\int_0^{\infty}e^{-t}dt=1$$
であるから，上式は
$$P_g:\ \lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi-\tau)s(e^{\tau})d\tau=s\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)d\tau$$

と書ける．ここで $s(e^\tau)$ は有界で，かつ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)e^{it\xi}d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-x}x^{-it}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(1-it)\neq 0 \qquad (-\infty<t<\infty),$$

すなわち $g(\xi)\in W$ である．

次に

$$h(\xi)=\begin{cases}0, & \text{ただし } \xi<0,\\ e^{-\xi}, & \text{ただし } \xi\geqq 0\end{cases}$$

とおくと，$h(\xi)\in L(-\infty,\infty)$ である．ゆえにウィーナーの定理 21.1 より

$$P_h:\ \lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\xi-\tau)s(e^\tau)d\tau=s\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)d\tau,$$

すなわち

$$\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\xi}e^{\tau-\xi}s(e^\tau)d\tau=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x s(y)dy=s$$

となる．いま任意に $\varepsilon>0$ をとると，上式より

$$s=\frac{(1+\varepsilon)s-s}{\varepsilon}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varepsilon x}\left\{\int_0^{(1+\varepsilon)x}s(y)dy-\int_0^x s(y)dy\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varepsilon x}\int_x^{(1+\varepsilon)x}s(y)dy=\lim_{x\to\infty}\left[s(x)+\frac{1}{\varepsilon x}\int_x^{(1+\varepsilon)x}\{s(y)-s(x)\}dy\right]$$

となる．ここで x を十分大きくすると

$$\left|\frac{1}{\varepsilon x}\int_x^{(1+\varepsilon)x}\{s(y)-s(x)\}dy\right|\leqq\frac{1}{\varepsilon x}\int_x^{(1+\varepsilon)x}dy\sum_{n=[x]+1}^{[y]}\frac{H}{n}$$
$$\leqq\sum_{n=[x]+1}^{[(1+\varepsilon)x]}\frac{H}{n}\leqq\frac{[\varepsilon x]+1}{[x]}H\leqq 2\varepsilon H$$

であるから，上式より

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,|s(x)-s|\leqq 2\varepsilon H$$

である．ε は任意であるから

$$\lim_{x\to\infty}s(x)=s,$$

すなわち $\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ である．　　　　（証明終）

ウィーナーのタウバー型定理を使って，さらに定理 19.4 を証明することができる（ウィーナー [22]，108 ページ以後参照）．

演習問題 3

1. もしアーベル総和法に関するタウバー型条件 (19.6) が成り立つならば，タウバー型条件 (19.12) が成り立つことを示せ.

2. もしアーベル総和法に関するタウバー型条件 (19.12) が成り立つならば，タウバー型条件 (19.13) が成り立つことを示せ.

3. もし $E_{1/2}-\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ で，かつ $u_n=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ であることを示せ.

4. もし $B-\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ で，かつ $u_n=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ であることを示せ.

5. もし $0<\alpha<1$ なるある α に対して $T_\alpha-\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ で，かつ $u_n=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ であることを示せ.

6. もし $0<\alpha<1$ なるある α に対して $S_\alpha-\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ で，かつ $u_n=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s$ であることを示せ.

第4章　関数解析の方法による研究

§22.　(FK)–空間の定義

今迄述べた多くの総和法からわかるように，最も普通の総和法は，あらかじめ行列 $A=(a_{n\nu})$ が与えられていて，数列 $\{s_n\}$ に対して

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}s_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

により数列 $\{t_n\}$ を定義し，$\lim_{n\to\infty}t_n=s$ により総和法 A が定義される方法である．すなわち行列 A は数列のある集合から収束数列の集合への写像を与える．

総和法の研究に関数解析の方法をはじめて用いたのはポーランドのマズール，オルリッチである．その後ツェラーはじめ多くの人々によりこの方面の研究がなされた．それらの一部分を次に述べよう．関数解析については，たとえばバナッハ〔5〕，本全書の前田〔3〕，山中〔4〕等を参照されたい．

複素数の全体を $\boldsymbol{C}$ とし，集合 $\boldsymbol{S}$ が $\boldsymbol{C}$ 上の**線形空間**（または**ベクトル空間**）であるとは，$\boldsymbol{S}$ の任意の2元 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対してそれぞれ和および差といわれる $\boldsymbol{S}$ の元 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ が定められている．また任意の $a\in\boldsymbol{C}$ と任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$ に対して，その積といわれる $\boldsymbol{S}$ の元 $a\boldsymbol{x}$ が定められ，それらは次の性質をもつ:

（i）　$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}$　ならば　$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$,

（ii）　$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{S}$　ならば　$\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$,

（iii）　すべての $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$ に対して

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x},\qquad \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

であるような $\boldsymbol{S}$ の元 $\boldsymbol{0}$ が存在する，

（iv）　$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$　ならば　$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$,

（v）　$a,b\in\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$　ならば　$(ab)\boldsymbol{x}=a(b\boldsymbol{x})$,

（vi）　$a,b\in\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}$　ならば

$$a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y},\qquad (a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}.$$

$\boldsymbol{C}$ の元を**スカラー**，$\boldsymbol{S}$ の元を**点**または**ベクトル**という．

線形空間 $\boldsymbol{S}$ から線形空間 $\boldsymbol{T}$ への写像 Φ が次の条件をみたすとき，**線形写像**または**線形作用素**という:

$$a\in\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}\quad\text{ならば}$$
$$\Phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\Phi(\boldsymbol{x})+\Phi(\boldsymbol{y})^{1)},\qquad \Phi(a\boldsymbol{x})=a\Phi(\boldsymbol{x}).$$

また $\boldsymbol{S}$ から $\boldsymbol{C}$ への線形写像を $\boldsymbol{S}$ 上の**線形汎関数**という．

線形空間 $\boldsymbol{S}$ 上の実数値汎関数 p が次の性質をもつとき**セミノルム**という:

（i） $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$ ならば $0\leqq p(\boldsymbol{x})<\infty$,

（ii） $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S},\ a\in\boldsymbol{C}$ ならば $p(a\boldsymbol{x})=|a|p(\boldsymbol{x})$,

（iii） $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}$ ならば $p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\leqq p(\boldsymbol{x})+p(\boldsymbol{y})$.

この（ii）より $p(\boldsymbol{0})=0$ がでる． $p(\boldsymbol{x})$ が上の3性質の外に次の性質をもつとき**ノルム**という:

（iv） $p(\boldsymbol{x})=0$ ならば $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

次のような線形空間 $\boldsymbol{S}$ を考えよう:

(F_1) $\boldsymbol{S}$ 上に有限個または可算無限個のセミノルムの系 p_j $(j=0,1,\cdots)$[2] が与えられていて， $\boldsymbol{S}$ の点列 $\boldsymbol{x}^{(r)}$ $(r=0,1,\cdots)$ が，ある $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$ に**収束**するとは，

$$\lim_{r\to\infty}p_j(\boldsymbol{x}^{(r)}-\boldsymbol{x})=0\qquad(j=0,1,\cdots)$$

と定義する．$\boldsymbol{x}$ を点列の**極限**といい，

$$\lim_{r\to\infty}\boldsymbol{x}^{(r)}=\boldsymbol{x}[\boldsymbol{S};\ p_j]\quad\text{または}\quad \boldsymbol{x}^{(r)}\to\boldsymbol{x}[\boldsymbol{S};\ p_j]\quad(r\to\infty)$$

と書く．このように収束の概念が定義された空間を $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ と書く．混同のおそれのないときには簡単に $[\boldsymbol{S}]$ または $\boldsymbol{S}$ と書く．また点列 $\boldsymbol{x}^{(r)}$ $(r=0,1,\cdots)$ が $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ の**コーシー列**であるとは

$$\lim_{m,n\to\infty}p_j(\boldsymbol{x}^{(m)}-\boldsymbol{x}^{(n)})=0\qquad(j=0,1,\cdots)$$

のときをいう．

---

1) 写像のこの性質を**加法的**という．

2) もしセミノルムの系が有限個の場合には，$p_j=p_N$ $(j=N+1,\ N+2,\ \cdots)$ とおけばよい．

このように線形空間に収束の概念を定義することにより，空間の**完備**，集合の**触点**，**第1類集合**，写像の**連続**などの概念を定義することができる．くわしくは本章のはじめに引用した文献を参照されたい．

空間 $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ はさらに次の二つの性質をもつとする:

(F_2)　$p_j(\boldsymbol{x})=0$　$(j=0, 1, \cdots)$　ならば　$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$[3]．

(F_3)　$[\boldsymbol{S};\ p_j]$ は完備である[4]．

(F_1)，(F_2)，(F_3) の性質をもつ線形空間 $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ を $(\boldsymbol{F})$–**空間**という[5]．いま

$$\hat{p}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{p_j(\boldsymbol{x})}{1+p_j(\boldsymbol{x})}$$

とおき，2点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の距離を $\hat{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ とすると，一つの距離空間 $[\boldsymbol{S};\ \hat{p}]$ が定義される．

もし (F)–空間 $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ が有限個のセミノルム $p_0, p_1, \cdots, p_m$ だけしかもたないとすると，$[\boldsymbol{S};\ p_j]$ はノルム

$$p^*(\boldsymbol{x})=p_0(\boldsymbol{x})+p_1(\boldsymbol{x})+\cdots+p_m(\boldsymbol{x})$$

をもつバナッハ空間[6] $[\boldsymbol{S};\ p^*]$ となる．このときには三つの空間 $[\boldsymbol{S};\ p_j]$，$[\boldsymbol{S};\ \hat{p}]$，$[\boldsymbol{S};\ p^*]$ における収束の概念は同じになる．

集合 $\boldsymbol{S}$ が**線形座標空間**であるとは，$\boldsymbol{S}$ の任意の元 $\boldsymbol{x}$ が複素数列，すなわち

$$\boldsymbol{x}=\{x_0, x_1, \cdots\}=\{x_n\}, \qquad x_n\in\boldsymbol{C} \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

であって，$\boldsymbol{S}$ の任意の二つの元 $\boldsymbol{x}=\{x_n\}$，$\boldsymbol{y}=\{y_n\}$ および任意の複素数 a に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\{x_n+y_n\}$，$a\boldsymbol{x}=\{ax_n\}$ と定義され，これらもまた $\boldsymbol{S}$ に属するときをいう．

線形座標空間が前述の意味で線形空間であることは明らかであって，また $\boldsymbol{0}=\{0, 0, \cdots\}$ となる．

---

3)　(F_2) より $[S;\ p_j]$ における収束列はただ一つの極限をもつ．

4)　すべてのコーシー列が収束するような空間を**完備**という．

5)　本書の (F)–空間はバナッハ〔5〕の (F)–空間とは異なる．ポーランド学派は本書の (F)–空間を (B_0)–**空間**と名付けた．また収束を定義するセミノルムがただ1個の場合には，本書の (F)–空間は次に述べるバナッハ空間となる．

6)　線形空間にノルムが定義されていて，かつ完備であるときこの空間を**バナッハ空間**または (B)–**空間**という．

(F)-空間 $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ が線形座標空間であって，　かつ $\boldsymbol{x}^{(r)}=\{x_n^{(r)}\}$，　$\boldsymbol{x}=\{x_n\}$ とし，

(F_K)　もし $\boldsymbol{x}^{(r)}\to\boldsymbol{x}[\boldsymbol{S};\ p_j]$ ならば $x_n^{(r)}\to x_n$　$(r\to\infty;\ n=0, 1, \cdots)$ であるとき，この空間を (FK)**-空間**という．

また (B)-空間が線形座標空間であって，かつ (F_K) をみたすとき $(\boldsymbol{BK})$**-空間**という．

§23.　連続線形汎関数

(FK)-空間上の連続な線形汎関数の研究は総和法への応用で重要である．次に述べる定理 23.1—23.4 はすべて，性質 (F_1) をもつ線形空間 $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ において成り立つ．

定理 23.1.　(**ハーン・バナッハの定理**)　$\boldsymbol{T}$ は空間 $[\boldsymbol{S};\ p]$ の線形部分空間とし，f は

$$|f(\boldsymbol{x})|\leqq p(\boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{T})$$

をみたす $\boldsymbol{T}$ 上の線形汎関数とすると，

$$|g(\boldsymbol{x})|\leqq p(\boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}),$$

$$g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{T})$$

を満足するような $\boldsymbol{S}$ 上の線形汎関数 g が存在する．

証明.　バナッハ〔5〕28 ページより

$$h(\boldsymbol{x})=\Re f(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{T}), \qquad |h(\boldsymbol{x})|\leqq p(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}),$$

$$h(a\boldsymbol{x})=ah(\boldsymbol{x}) \qquad (a \text{ は実数},\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S})$$

なる $\boldsymbol{S}$ 上の加法的な実汎関数 h が存在する．$g(\boldsymbol{x})=h(\boldsymbol{x})-ih(i\boldsymbol{x})$ が求めるものである (前田 [3] 77 ページ以後参照)．　(証明終)

定理 23.2.　$[\boldsymbol{S};\ p_j]$ 上のセミノルム q が連続[1] であるための必要十分条件は，ある $\rho\geqq0$ とある正の整数 m に対して

$$q(\boldsymbol{x})\leqq\rho\{p_0(\boldsymbol{x})+p_1(\boldsymbol{x})+\cdots+p_m(\boldsymbol{x})\} \qquad (\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}) \tag{23.1}$$

なることである．

証明.　(23.1) が十分条件であることは明らか．

---

1)　線形空間 $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ より線形空間 $[\boldsymbol{T};\ q_j]$ への写像 $\boldsymbol{\Phi}$ が**連続**であるとは，もし $\lim_{r\to\infty}\boldsymbol{x}^{(r)}=\boldsymbol{x}$ $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ ならば $\lim_{r\to\infty}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(r)})=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ $[\boldsymbol{T};\ q_j]$ のときをいう．

必要条件.　もし (23.1) が満足されていないと仮定すると,

$$q(\boldsymbol{x}^{(r)})>\boldsymbol{\rho}_r\{p_0(\boldsymbol{x}^{(r)})+p_1(\boldsymbol{x}^{(r)})+\cdots+p_r(\boldsymbol{x}^{(r)})\}\qquad(r=0,1,\cdots)$$

であるような点列 $\boldsymbol{x}^{(r)}$ $(r=0,1,\cdots)$ と正数列 $\{\boldsymbol{\rho}_r\}$, ただし $\lim_{r\to\infty}\boldsymbol{\rho}_r=\infty$, が存在する. 適当な数列 $\{a_r\}$ をえらび, $\boldsymbol{y}^{(r)}=a_r\boldsymbol{x}^{(r)}$ とし

$$\boldsymbol{y}^{(r)}\to\boldsymbol{0}\quad[\boldsymbol{S};\ p_j]\quad かつ\quad q(\boldsymbol{y}^{(r)})\to\infty\quad(r\to\infty)$$

とできる. ゆえに q は連続でない.　(証明終)

系.　二つの空間 $[\boldsymbol{S};\ p_j, q_i]$, $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ における収束が同値[2] であるための必要十分条件は, すべての q_i が $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ の上で連続なることである.

証明.　収束の定義と定理より十分条件であることは明らか.

必要条件.　もし q_i の一つが $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ の上で連続でないと仮定する. それを q と書くことにする. 定理の証明における $\boldsymbol{y}^{(r)}$ は $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ においては $\boldsymbol{0}$ に収束するが, $[\boldsymbol{S};\ p_j, q_i]$ においてはそうではない.　(証明終)

定理 23.3.　$[\boldsymbol{S};\ p_j]$ 上の任意の連続な線形汎関数 f は

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{j=0}^{\infty}f_j(\boldsymbol{x})\qquad(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S})$$

と表すことができる. ここで f_j は $\boldsymbol{S}$ 上の線形汎関数で, かつ

$$|f_j(\boldsymbol{x})|\leqq\rho_j p_j(\boldsymbol{x})\qquad(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S};\ j=0,1,\cdots)$$

なる $\boldsymbol{\rho}_j\geqq0$ が存在する. さらに $\boldsymbol{\rho}_j$ $(j=0,1,\cdots)$ は有限個を除くと, 他はすべて 0 となる.

証明.　$|f(\boldsymbol{x})|$ は $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ 上の連続なセミノルムである. 定理 23.2 より

$$|f(\boldsymbol{x})|\leqq\rho\{p_0(\boldsymbol{x})+p_1(\boldsymbol{x})+\cdots+p_m(\boldsymbol{x})\}\qquad(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S})$$

なる形の不等式が成り立つ.

まず $\boldsymbol{\rho}=m=1$ と仮定する. 直積集合

$$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S}=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,|\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S},\ \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}\}$$

において,

$$(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)=(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2),\qquad a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(a\boldsymbol{x},a\boldsymbol{y})\qquad(a\in\boldsymbol{C})$$

---

2)　二つの空間における収束が同値であるとは, もし点列 $\boldsymbol{x}^{(r)}$ $(r=0,1,\cdots)$ が一方の空間において $\boldsymbol{x}$ に収束するならば, 他方の空間においてもそうであり, またこの逆も成り立つときをいう.

と定義すると，これはまた線形空間[3]となる．いま $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=p_0(\boldsymbol{x})+p_1(\boldsymbol{y})$ とおくと，q は線形空間 $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S}$ 上のセミノルムである．ここで $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$ とおき，定理 23.1 により，この線形汎関数 g を $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S}$ 全体に接続し

$$|g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|\leqq p_0(\boldsymbol{x})+p_1(\boldsymbol{y})$$

であるようにする．$f_0(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$，$f_1(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x})$ とおくと求める f の表示が得られる．

一般の ρ についての証明は容易である．また $m>1$ のときには数学的帰納法により証明する．すなわち f を

$$f(\boldsymbol{x})=f^*(\boldsymbol{x})+f_m(\boldsymbol{x}),$$

$$|f^*(\boldsymbol{x})|\leqq\rho\{p_0(\boldsymbol{x})+p_1(\boldsymbol{x})+\cdots+p_{m-1}(\boldsymbol{x})\},\qquad |f_m(\boldsymbol{x})|\leqq\rho\, p_m(\boldsymbol{x})$$

とおき上記の方法による．　　　　（証明終）

定理 23.4.　$\boldsymbol{T}$ は $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ の線形部分空間とし，$\boldsymbol{x}^*\in\boldsymbol{S}$ は $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ において $\boldsymbol{T}$ の触点[4]でないと仮定する．

（i）　すると，

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases} 0, & \text{ただし}\quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{T}, \\ 1, & \text{ただし}\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^* \end{cases}$$

であるような $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ 上の連続な線形汎関数 f が存在する．

（ii）　もし g を $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ 上の連続な線形汎関数とすると，

$$h(\boldsymbol{x})=\begin{cases} g(\boldsymbol{x}), & \text{ただし}\quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{T}, \\ b, & \text{ただし}\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^* \end{cases}$$

であるような $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ 上の連続な線形汎関数 h が存在する．ここで b はあらかじめ与えられた任意の数とする．

証明.　（i）　$\boldsymbol{x}^*$ は $\boldsymbol{T}$ の触点でないから，

$$p_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)+p_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)+\cdots+p_m(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)\geqq\varepsilon\qquad(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{T})$$

であるような $\varepsilon>0$ と正の整数 m が存在する．ゆえに定理 23.1 より

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases} 0, & \text{ただし}\quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{T}, \\ 1, & \text{ただし}\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*, \end{cases}$$

---

3)　この空間を $\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{S}$ の**直積空間**という．

4)　$\boldsymbol{T}$ の点ばかりよりなる点列の，$[\boldsymbol{S};\ p_j]$ における極限の全体からなる集合を $\boldsymbol{T}$ の**閉包**といい $\overline{\boldsymbol{T}}$ と書く（明らかに $\boldsymbol{T}\subseteqq\overline{\boldsymbol{T}}$）．$\overline{\boldsymbol{T}}$ に属する点を $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ における $\boldsymbol{T}$ の**触点**という．

$$|f(\boldsymbol{x})| \leqq \frac{1}{\varepsilon}\{p_0(\boldsymbol{x})+p_1(\boldsymbol{x})+\cdots+p_m(\boldsymbol{x})\}$$

なる線形汎関数 f が存在する[5]．この f は $[\boldsymbol{S};\ p_j]$ 上で連続である．

(ii)
$$h(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})+\{b-g(\boldsymbol{x}^*)\}f(\boldsymbol{x})$$

は求めるものである．（証明終）

§ 24. (FK)–空間に関する基本定理

総和法への応用のために基礎となる諸定理を述べよう．

定理 24.1.[1] 次に述べる諸集合はそれぞれのセミノルムをもって (FK)–空間である:

$\boldsymbol{S}_K$，　複素数列 $\{x_0, x_1, \cdots\}$ の全体からなる空間はセミノルム $|x_0|$, $|x_1|$, $\cdots$.

$\boldsymbol{S}_B$，　有界数列の全体からなる空間
$\boldsymbol{S}_C$，　収束数列の全体からなる空間
$\boldsymbol{S}_N$，　0 に収束する数列の全体からなる空間
はセミノルム $\sup_{n=0,1,\cdots}|x_n|$.

$\boldsymbol{U}_A$，　絶対収束する級数 $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ の全体からなる空間はセミノルム $\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|$.

（証明略）

定理 24.2.[1] (FK)–空間 $[\boldsymbol{S}_K]$, $[\boldsymbol{S}_C]$, $[\boldsymbol{S}_N]$ 上の任意の連続な線形汎関数はそれぞれ次のように表される:

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{n=0}^{m}\alpha_n x_n{}^{2)} \qquad (\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}_K), \tag{24.1}$$

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x_n+\alpha\lim_{n\to\infty}x_n \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|<\infty,\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}_C\right), \tag{24.2}$$

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x_n \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|<\infty,\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}_N\right). \tag{24.3}$$

また逆に，このように表される汎関数はそれぞれの空間で線形，連続である．

（証明略）

定理 24.3. $[\boldsymbol{S}]$, $[\boldsymbol{T}]$ はともに (FK)–空間とし，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ は $[\boldsymbol{S}]$ から

---

5) バナッハ〔5〕57 ページ参照.

1) 定理 24.1, 24.2 の証明は，たとえばバナッハ〔5〕参照.

2) (24.1) であるような α_n と m が存在する.

[$\boldsymbol{T}$] への写像とする. $\boldsymbol{x}=\{x_0, x_1, \cdots\}$, $\boldsymbol{y}=\{y_0, y_1, \cdots\}$ とし, すべての $n=0, 1, \cdots$ に対して

$$y_n=f_n(\boldsymbol{x}) \qquad (\text{ただし } \boldsymbol{y}=\Phi(\boldsymbol{x}))$$

が, もし [S] 上の連続な線形汎関数であるならば, Φ もまた [S] で線形, 連続である.

証明. Φ が線形であることは明らか. いま [S] の点列 $\boldsymbol{x}^{(r)}$ ($r=0, 1, \cdots$) が

$$\lim_{r\to\infty}\boldsymbol{x}^{(r)}=\boldsymbol{x}[S], \quad \text{かつ} \quad \lim_{r\to\infty}\Phi(\boldsymbol{x}^{(r)})=\boldsymbol{z}[\boldsymbol{T}]$$

をみたすとすると, f_n の連続性と (*FK*)-空間の性質 (F_K) より

$$f_n(\boldsymbol{x})=f_n(\lim_{r\to\infty}\boldsymbol{x}^{(r)})=\lim_{r\to\infty}f_n(\boldsymbol{x}^{(r)})=z_n,$$

すなわち $\Phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{z}$ である. ゆえに Φ は連続である[3]. (証明終)

定理 24.4. (i) (24.1) の形の汎関数は任意の(*FK*)-空間 [S] 上で定義されて, 線形, かつ連続である.

(24.4) (ii)
$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x_n$$

の形の汎関数は, これが定義されている任意の (*FK*)-空間 [S] 上で線形, 連続である.

(iii) 行列 $A=(a_{n\nu})$ は, ある (*FK*)-空間 [S] からある (*FK*)-空間 [$\boldsymbol{T}$] への写像を

$$\boldsymbol{y}=\Phi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}=\{x_0, x_1, \cdots\}\in\boldsymbol{S}, \quad \boldsymbol{y}=\{y_0, y_1, \cdots\}\in\boldsymbol{T},$$

$$y_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}x_\nu \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

により与えるとすると, この写像 Φ は線形, 連続である. 特に $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}_C$ のときには $g(\boldsymbol{x})=\lim_{n\to\infty}y_n$[4] で定義される [$S$] 上の汎関数は線形, 連続である.

証明. (i) この汎関数が線形であることは明らか. 連続であることは (F_K) よりわかる.

(ii) 前定理で $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}_C$ とし,

---

3) バナッハ〔5〕41 ページ, 定理 7 参照.

4) §2 の記法によるとこれは $A-\lim_{n\to\infty}x_n$ である.

$$f_n(\boldsymbol{x})=\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\nu x_\nu \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおけば，$[\boldsymbol{S}]$ から $[\boldsymbol{S}_C]$ への線形，連続な写像が得られる．$[\boldsymbol{S}_C]$ 上の汎関数 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$（ただし $\{y_0,\ y_1,\ \cdots\}\in\boldsymbol{S}_C$）も線形，連続であるから (24.4) は $[\boldsymbol{S}]$ 上の線形，連続な汎関数である．

(iii)　(ii) よりすべての $n=0,\ 1,\ \cdots$ に対して

$$f_n(\boldsymbol{x})=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}x_\nu$$

は $[\boldsymbol{S}]$ 上の線形，連続な汎関数であるから，前定理より写像 $\boldsymbol{\Phi}$ は線形，連続である．$g(\boldsymbol{x})$ が $[\boldsymbol{S}]$ 上の線形，連続な汎関数であることは (ii) と同様である．（証明終）

定理 24.5.　$[\boldsymbol{S}]$ および $[\boldsymbol{T}]$ はともに (FK)-空間で $\boldsymbol{S}\subseteqq\boldsymbol{T}$ とする．

(i)　もし $\lim\limits_{r\to\infty}\boldsymbol{x}^{(r)}=\boldsymbol{x}[\boldsymbol{S}]$ ならば $\lim\limits_{r\to\infty}\boldsymbol{x}^{(r)}=\boldsymbol{x}[\boldsymbol{T}]$ である．特に $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}$ ならば，この逆も成り立つ．

(ii)　もし $\boldsymbol{S}\neq\boldsymbol{T}$ ならば $\boldsymbol{S}$ は $[\boldsymbol{T}]$ の第1類集合[5] である．

証明.　(i)　行列 $E=(e_{n\nu})$ を

$$e_{n\nu}=\begin{cases}1, & \text{ただし}\quad n=\nu,\\ 0, & \text{ただし}\quad n\neq\nu\end{cases}$$

により定義する．行列 E による $[\boldsymbol{S}]$ から $[\boldsymbol{T}]$ への写像 $\boldsymbol{\Phi}$ は前定理 (iii) より連続で，かつ $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ であることから明らか．特に $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}$ のときは E は，$[\boldsymbol{T}]$ から $[\boldsymbol{S}]$ への写像を与える．

(ii)　行列 E は，$[\boldsymbol{S}]$ を $[\boldsymbol{T}]$ の真部分集合 $\boldsymbol{S}$ 上へ線形，連続に写像するゆえ $\boldsymbol{S}$ は $[\boldsymbol{T}]$ の第1類集合である[6]．（証明終）

定理 24.6.　有限個または可算無限個の (FK)-空間 $[\boldsymbol{S}^{(i)}]$ $(i=0,\ 1,\ \cdots)$ が与えられていて

$$\boldsymbol{S}^{(i)}\subset\bigcup_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{S}^{(j)}\,{}^{7)} \qquad (i=0,\ 1,\ \cdots)$$

---

5)　$[\boldsymbol{T}]$ の部分集合 $\boldsymbol{S}$ が $\overline{\boldsymbol{T}-\overline{\boldsymbol{S}}}=\boldsymbol{T}$ であるとき $\boldsymbol{S}$ を**疎集合**といい，疎集合の可算個の和で表される集合を**第1類集合**という．

6)　バナッハ〔5〕38 ページ，定理3参照.

7)　$\subset$ は真部分集合を表す.

とすると，座標空間 $\boldsymbol{T}=\bigcup_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{S}^{(j)}$ は (*FK*)–空間ではない．

証明． もし $\boldsymbol{T}$ が (*FK*)–空間であると仮定すると，前定理（ii）より各 $\boldsymbol{S}^{(i)}$ は $[\boldsymbol{T}]$ の第1類集合となる．ゆえに $[\boldsymbol{T}]$ はそれ自身の第1類集合である．これは矛盾である[8]．

定理 24.7. 有限個または可算無限個の (*FK*)–空間 $[\boldsymbol{S}^{(i)};\ p_{ji}]$ $(i=0.\ 1,\ \cdots)$ が与えられているとき，

（i） $\boldsymbol{T}=\bigcap_{i=0}^{\infty}\boldsymbol{S}^{(i)}$ はセミノルム p_{ji} $(i,\ j=0,\ 1,\ \cdots)$ をもって (*FK*)–空間である．

（ii） $[\boldsymbol{T}]$ 上の任意の連続な線形汎関数 f は

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=0}^{\infty}f_i(\boldsymbol{x})$$

と表すことができる．ここで各 $i=0,\ 1,\ \cdots$ に対し，f_i は $[\boldsymbol{S}^{(i)}]$ 上の連続な線形汎関数であって，それらのうち有限個を除いて他はすべて恒等的に 0 である．

証明．（i） $\boldsymbol{T}$ が線形座標空間で，$[\boldsymbol{T};\ p_{ji}]$ が (F_1), (F_2) を満足することは明らか．もし点列 $\boldsymbol{x}^{(r)}$ $(r=0,\ 1,\ \cdots)$ が $[\boldsymbol{T};\ p_{ji}]$ のコーシー列であるならば，この点列は各 $[\boldsymbol{S}^{(i)}]$ のコーシー列でもある．ゆえに各 $[\boldsymbol{S}^{(i)}]$ の中に極限 $\boldsymbol{y}^{(i)}$ をもつ．(F_K) よりすべての $\boldsymbol{y}^{(i)}$ $(i=0,\ 1,\ \cdots)$ は等しい．ゆえに

$$\lim_{r\to\infty}p_{ji}(\boldsymbol{x}^{(r)}-\boldsymbol{x})=0\qquad(i,\ j=0,\ 1,\ \cdots)$$

なる $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{T}$ が存在する．$\boldsymbol{x}$ は $[\boldsymbol{T}]$ における点列 $\boldsymbol{x}^{(r)}$ $(r=0,\ 1,\ \cdots)$ の極限である．ゆえに $[\boldsymbol{T}]$ は (F_3) をみたす．(F_K) も同様に示される．

（ii） 定理 23.3, 23.1 より明らか．（証明終）

定理 24.8. $[\boldsymbol{T};\ q_j]$ および $[\boldsymbol{S}^{(n)};\ p_{jn}]$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ はすべて (*FK*)–空間とし，各 f_n は $[\boldsymbol{S}^{(n)}]$ 上の連続な線形汎関数とする．

（i） $f_n(\boldsymbol{x})$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ がすべて定義されて，かつ $\boldsymbol{y}=\{f_n(\boldsymbol{x})\}\in\boldsymbol{T}$ であるような $\boldsymbol{x}$ の全体からなる集合 $\boldsymbol{S}$ は，セミノルム

$$p_{jn}(\boldsymbol{x}),\ q_j(\boldsymbol{y})\qquad(j,\ n=0,\ 1,\ \cdots)\tag{24.5}$$

---

8) バナッハ〔5〕14 ページ，定理2参照．

をもって (FK)-空間である.

（ii）$[\boldsymbol{S}]$ 上の任意の連続な線形汎関数 f は

$$f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})+h(\boldsymbol{y}) \qquad (\boldsymbol{y}=\{f_n(\boldsymbol{x})\})$$

と表される．ここで g, h はそれぞれ $[\cap \boldsymbol{S}^{(n)}]$, $[\boldsymbol{T}]$ における連続な線形汎関数である.

証明．（i）$\boldsymbol{S}$ は線形座標空間で，さらに (24.5) のセミノルムをもつ空間 $[\boldsymbol{S};\ p_{jn}, q_j]$ は (F_1), (F_2) をみたすことは明らか．いま $\boldsymbol{x}^{(r)}$ を $[\boldsymbol{S}]$ のコーシー列とすると,

$$\boldsymbol{x}^{(r)} \to \boldsymbol{x}[\cap \boldsymbol{S}^{(n)}]$$

なる $\boldsymbol{x} \in \cap \boldsymbol{S}^{(n)}$ と,

$$\boldsymbol{y}^{(r)} \to \boldsymbol{z}[\boldsymbol{T}]$$

なる $\boldsymbol{z}=\{z_n\} \in \boldsymbol{T}$ が存在する．f_n の連続性と $[\boldsymbol{T}]$ に関する性質 (F_K) より

$$f_n(\boldsymbol{x})=f_n(\lim_{r\to\infty}\boldsymbol{x}^{(r)})=\lim_{r\to\infty}f_n(\boldsymbol{x}^{(r)})=z_n$$

となる．ゆえに $\boldsymbol{x}$ は点列 $\boldsymbol{x}^{(r)}$ $(r=0, 1, \cdots)$ の $[\boldsymbol{S}]$ における極限となり，$[\boldsymbol{S}]$ は (F_3) をみたす．前定理より $[\cap \boldsymbol{S}^{(n)}]$ は (F_K) をみたすから $[\boldsymbol{S}]$ も (F_K) をみたす.

（ii）定理 23.3, 23.1 より明らか.　　　　（証明終）

定理 24.9. 数列 $\{\alpha_n\}$ が与えられている．$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu x_\nu$ が収束するような $\boldsymbol{x}=\{x_n\}$ の全体からなる集合 $\boldsymbol{S}$ は，セミノルム

(24.6)　$$|x_0|,\ |x_1|,\ \cdots,$$

(24.7)　$$\sup_{m=0,1,\cdots}\left|\sum_{\nu=0}^{m}\alpha_\nu x_\nu\right|$$

をもって (FK)-空間である．もし α_n の中で 0 でないものが有限個だけのときには (24.7) はいらない.

証明． 前定理で $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}_C$, $\boldsymbol{S}^{(n)}=\boldsymbol{S}_K$ $(n=0, 1, \cdots)$, $f_n(\boldsymbol{x})=\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\nu x_\nu$ とおくとよい．定理の後半は定理 23.2 系より明らか.　　　　（証明終）

定理 24.10. 行列 $A=(a_{n\nu})$ と (FK)-空間 $[\boldsymbol{T};\ q_j]$ が与えられている.

（i）すべての $n=0, 1, \cdots$ に対して $y_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}x_\nu$ が収束し[9]，かつ $\boldsymbol{y}$

9) 行列 A による $\boldsymbol{x}=\{x_n\}$ の変換が $\boldsymbol{y}=\{y_n\}$ であるとき $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ と書く.

$=\{y_n\}\in \boldsymbol{T}$ であるような $\boldsymbol{x}=\{x_n\}$ の全体からなる集合を $\boldsymbol{S}$ とすると，$\boldsymbol{S}$ は次のセミノルムをもって (*FK*)-空間である:

$$\sup_{m=0,1,\cdots}\left|\sum_{\nu=0}^{m}a_{0\nu}x_\nu\right|,\quad \sup_{m=0,1,\cdots}\left|\sum_{\nu=0}^{m}a_{1\nu}x_\nu\right|,\quad \cdots; \tag{24.8}$$

$$|x_0|,\quad |x_1|,\quad \cdots; \tag{24.9}$$

$$q_0(A\boldsymbol{x}),\quad q_1(A\boldsymbol{x}),\quad \cdots. \tag{24.10}$$

(ii) もし行列 A が行有限であるならば，(24.8) はいらない．

証明. 定理 24.8 で

$$f_n(\boldsymbol{x})=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}x_\nu \qquad (n=0,1,\cdots)$$

とおくと，定理 24.9 とより明らか．（証明終）

定理 24.11. 前定理と同じ仮定をし，[$\boldsymbol{S}$] はセミノルム (24.8)，(24.9)，(24.10) をもつ (*FK*)-空間とする．

(i) [$\boldsymbol{S}$] 上の任意の連続な線形汎関数 f は

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu x_\nu+h(A\boldsymbol{x})$$

と表される．ここで h は [$\boldsymbol{T}$] 上の連続な線形汎関数とする．

(ii) もし行列 A が行有限であるならば，上式で α_ν ($\nu=0,1,\cdots$) のうち有限個を除くと，他はすべて 0 となるようにすることができる．

証明. (i) いま p を (24.8) または (24.9) のセミノルムの一つとし，g を [$\boldsymbol{S}$] 上の線形汎関数で $|g(\boldsymbol{x})|\leqq\rho p(\boldsymbol{x})$ をみたすようなものとする．任意の $\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{S}]$ に対して $\boldsymbol{x}^{(r)}=\{x_0, x_1, \cdots, x_r, 0, 0, \cdots\}$ とおくと，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(r)}=\{0, \cdots, 0, x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots\}$ であるから，(24.8)，(24.9) のセミノルムの定義より $\lim_{r\to\infty}p(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(r)})=0$ である．ゆえに $g(\boldsymbol{x})=\lim_{r\to\infty}g(\boldsymbol{x}^{(r)})$ である．いま，ベクトル $\boldsymbol{e}_\nu$ ($\nu=0,1,\cdots$) を

$$\boldsymbol{e}_\nu=\{0,\cdots,0,\overset{\text{第}\nu\text{番目}}{1},0,\cdots\}$$

とおくと，$g(\boldsymbol{x})=\sum_{\nu=0}^{\infty}x_\nu g(\boldsymbol{e}_\nu)=\sum_{\nu=0}^{\infty}x_\nu\beta_\nu$ となる（ただし $g(\boldsymbol{e}_\nu)=\beta_\nu$）．

ゆえに [$\boldsymbol{S}$] 上の任意の連続な線形汎関数は，定理 23.3（あるいは定理 24.8 (ii)）より

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{j=0}^{\infty}g_j(\boldsymbol{x})+h(A\boldsymbol{x})$$

と表される．ここで $\sum_{j=0}^{\infty}g_j$ は実は有限個の和であり，また $g_j(\boldsymbol{x})=\sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_{j\nu}x_\nu$ と書ける．h は $[\boldsymbol{T}]$ 上の連続な線形汎関数である．$\alpha_\nu=\sum_{j=0}^{\infty}\beta_{j\nu}$ とおくとよい．

（ii）　前定理（ii）より明らか．　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

§25.　総和法への応用

今迄述べた (FK)–空間に関する結果を，行列 $A=(a_{n\nu})$ によって与えられる数列–数列型総和法 A の研究に適用しよう．

定理 25.1.　上記の総和法 A の総和域 $\mathscr{F}(A)$ は次のセミノルムをもって (FK)–空間である：

$$\sup_{m=0,1,\cdots}\left|\sum_{\nu=0}^{m}a_{0\nu}x_\nu\right|,\quad \sup_{m=0,1,\cdots}\left|\sum_{\nu=0}^{m}a_{1\nu}x_\nu\right|,\quad\cdots;\tag{25.1}$$

$$|x_0|,\quad |x_1|,\quad\cdots;\tag{25.2}$$

$$\sup_{n=0,1,\cdots}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}x_\nu\right|.\tag{25.3}$$

もし行列 A が行有限であるならば (25.1) はいらない．

証明．　定理 24.1，24.10 より明らか．

定理 25.2.　（i）　前定理によって与えられる (FK)–空間 $\mathscr{F}(A)$ 上の連続な線形汎関数 f は，

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu x_\nu+\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n y_n+\beta\lim_{n\to\infty}y_n$$

と表される．ここで $\boldsymbol{x}\in\mathscr{F}(A)$，$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$，$\sum_{n=0}^{\infty}|\beta_n|<\infty$ とする．

（ii）　もし行列 A が行有限であるならば，上の f の式で α_ν ($\nu=0,1,\cdots$) のうち有限個を除くと他はすべて 0 となるようにすることができる．

(iii)　もし A がコンザーバティブであるならば $\sum_{\nu=0}^{\infty}|\alpha_\nu|<\infty$ である．

証明．　（i），(ii)　定理 24.2，24.11 より明らか．

(iii)　このときには任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}_C$ に対して $\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu x_\nu$ は収束する．したがって $\sum_{\nu=0}^{\infty}|\alpha_\nu|<\infty$ である．なぜならば，いま仮りに $\sum_{\nu=0}^{\infty}|\alpha_\nu|=\infty$ とすれば，

$Q_\nu=\sum_{i=0}^{\nu}|\alpha_i|$ とおくと $Q_\nu\nearrow\infty$ となる．$\sum_{\nu=0}^{\infty}|\alpha_\nu|/Q_\nu=\infty$ であるから，$x_\nu=(\operatorname{sgn}\alpha_\nu)/Q_\nu$ $(\nu=0,1,\cdots)$ とおくと $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}_C$ であるが，$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu x_\nu$ は発散する．これは矛盾である．　(証明終)

定理 25.3.　有限個または可算無限個の行列総和法[1] $A^{(i)}$ $(i=0,1,\cdots)$ が与えられていて，$\mathscr{F}(A^{(i)})$ の中には最大のものがないとすると，$\mathscr{F}(A)=\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathscr{F}(A^{(i)})$ であるような行列総和法 A は存在しない．

証明.　(FK)-空間 $\mathscr{F}(A^{(i)})$ は定理 24.6 の条件をみたす．ゆえに $\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathscr{F}(A^{(i)})$ は (FK)-空間でない．他方定理 25.1 より行列総和法 A に対して $\mathscr{F}(A)$ は (FK)-空間である．　(証明終)

すでに述べたように[2]，チェザロ総和法については，もし $k>-1$ ならば $(C,k)\subset(C,k+1)$ である．数列 $\{x_n\}$ が，もしある $k>-1$ に対して値 s に (C,k)-総和可能であるならば，$\{x_n\}$ は s に **C_∞-総和可能**という．いうまでもなく $\mathscr{F}(C_\infty)=\bigcup_{k=0}^{\infty}\mathscr{F}(C,k)$ である．上の定理から次の系は明らかである．

系.　C_∞-総和法と同じ総和域をもつ行列総和法は存在しない．

§26.　マズール・オルリッチ・ブルードノーの定理

有界数列に対する総和法の共存性に関するマズール・オルリッチ・ブルードノーの定理を述べよう．この定理は最初 1933 年にマズール・オルリッチにより証明なしに述べられた．その後 1945 年にブルードノーにより証明が与えられた．この証明は難しく，また関数解析の方法を使っていない．1954 年にマズール・オルリッチは関数解析の方法を使うこの定理の証明を発表した．それをここで述べよう．

補助定理 26.1.

$$\boldsymbol{x}^{(r)}=\{x_0{}^{(r)},\ x_1{}^{(r)},\ \cdots\}\qquad(r=0,1,\cdots)$$

はすべて 0 に収束する数列とする．さらに

$$\lim_{r\to\infty}x_n{}^{(r)}=x_n\qquad(n=0,1,\cdots),$$

1)　詳しくというと，行列によって与えられる数列-数列型総和法．

2)　44 ページ参照．

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0, \quad \sup_{n,\, r=0,1,\cdots} |x_n^{(r)}| \leqq H<\infty$$

と仮定すると，任意の $\varepsilon>0$ と任意の正の整数 λ に対して，次のような数 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k$ が存在する:

(i)　$$\alpha_r \geqq 0, \quad \text{ただし} \quad r=0, 1, \cdots, k,$$
$$\alpha_r=0, \quad \text{ただし} \quad r=0, 1, \cdots, \lambda,$$

(ii)　$$\sum_{r=0}^{k} \alpha_r=1,$$

(iii)　$$\sup_{n=0,1,\cdots} \left| \sum_{r=0}^{k} \alpha_r x_n^{(r)}-x_n \right| <\varepsilon.$$

証明． 仮定より

$$0 \leqq n_0<n_1<\cdots, \quad \lim_{r\to\infty} n_r=\infty,$$
$$0=m_{-1}<m_0<m_1<\cdots, \quad \lim_{r\to\infty} m_r=\infty,$$

かつ次の条件をみたすような整数列 $\{n_r\}, \{m_r\}$ の存在がわかる:

(26.1)　$$\sup_{n>n_r} |x_n^{(m_l)}-x_n| <\frac{\varepsilon}{2} \qquad (l=0, 1, \cdots, r-1),$$

(26.2)　$$\sup_{n\leqq n_r} |x_n^{(m_r)}-x_n| <\frac{\varepsilon}{2}.$$

いま，$\xi>(4H+\varepsilon\lambda)/\varepsilon$ であるような整数 $\xi>0$ をえらび，$k=m_\xi$ また $\alpha_0, \cdots, \alpha_k$ を

$$\alpha_r=\begin{cases} \dfrac{1}{\xi-\lambda}, & \text{ただし} \quad r=m_l \quad (\lambda+1 \leqq l \leqq \xi), \\ 0, & \text{それ以外のすべての} \quad r<m_\xi \end{cases}$$

とおく．(i) は明らか．(ii) は

$$\sum_{r=0}^{k} \alpha_r=\sum_{l=\lambda+1}^{\xi} \alpha_{m_l}=1$$

より明らか．(iii) は (26.1), (26.2) より

$$\left| \sum_{r=0}^{k} \alpha_r x_n^{(r)}-x_n \right| = \left| \sum_{l=\lambda+1}^{\xi} \alpha_{m_l} (x_n^{(m_l)}-x_n) \right|$$
$$\leqq \frac{1}{\xi-\lambda} \sum_{l=\lambda+1}^{\xi} |x_n^{(m_l)}-x_n| <\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2H}{\xi-\lambda}<\varepsilon$$

なるゆえ明らか．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

補助定理 26.2.　行列 $A=(a_{n\nu})$ による数列-数列型総和法を A とし，

$\lim_{n\to\infty} x_n=0$ なる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して $A-\lim_{n\to\infty} x_n=0$ とする[1]．
$A-\lim_{n\to\infty} x_n=0$ であるような任意の有界数列 $\{x_n\}$ と任意の $\varepsilon>0$ と任意の正の整数 λ に対して，次のような数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\eta$ が存在する:

$$0\leqq \alpha_n \leqq 1 \qquad (n=1, 2, \cdots, \eta),$$

かつ

$$\bar{x}_n=\begin{cases} x_n, & \text{ただし}\quad n=0, 1, \cdots, \lambda, \\ \alpha_{n-\lambda}x_n, & \text{ただし}\quad n=\lambda+1,\ \lambda+2,\ \cdots,\ \lambda+\eta \quad (=k\ \text{とおく}), \\ 0, & \text{それ以外のすべての}\ n \end{cases}$$

によって定義される数列 $\{\bar{x}_n\}$ は

$$\sup_{n=0,1,\cdots}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\bar{x}_\nu-\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}x_\nu\right|<\varepsilon$$

をみたす．

証明． いま

$$t^{(r)}=\{t_n{}^{(r)}\}=\left\{\sum_{\nu=0}^{r} a_{n\nu}x_\nu\right\} \quad (r=0, 1, \cdots),$$

$$t=\{t_n\}=\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}x_\nu\right\}$$

とおくと，仮定よりこれらの数列は前補助定理の条件をみたす．ゆえに次のような数 $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_k$ が存在する:

(i) $\beta_r\geqq 0$, ただし $r=0, 1, \cdots, k$,
$\beta_r=0$, ただし $r=0, 1, \cdots, \lambda-1$,

(ii) $$\sum_{r=0}^{k}\beta_r=1,$$

(iii) $$\sup_{n=0,1,\cdots}\left|\sum_{r=0}^{k}\beta_r t_n{}^{(r)}-t_n\right|<\varepsilon.$$

ここで

$$\alpha_i=\beta_{\lambda+i}+\beta_{\lambda+i+1}+\cdots+\beta_k \qquad (i=1, 2, \cdots,\ k-\lambda=\eta)$$

とおくと，

$$\sum_{r=0}^{k}\beta_r t_n{}^{(r)}=\sum_{r=0}^{k}\beta_r\sum_{\nu=0}^{r}a_{n\nu}x_\nu=\sum_{\nu=0}^{k}a_{n\nu}x_\nu\sum_{r=\nu}^{k}\beta_r$$
$$=a_{n0}x_0+\cdots+a_{n\lambda}x_\lambda+a_{n,\lambda+1}\alpha_1x_{\lambda+1}+\cdots+a_{nk}\alpha_{k-\lambda}x_k$$

---

1) 定理 2.5 参照．

となるから，(iii) より

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\bar{x}_\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}x_\nu\right| = \left|\sum_{\nu=\lambda+1}^{k} a_{n\nu}(\alpha_{\nu-\lambda}-1)x_\nu - \sum_{\nu=k+1}^{\infty} a_{n\nu}x_\nu\right|$$

$$= \left|\sum_{r=0}^{k} \beta_r t_n{}^{(r)} - t_n\right| < \varepsilon \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots).$$

(証明終)

定理 26.3.　行列 $A=(a_{n\nu})$, $B=(b_{n\nu})$ により与えられる数列 - 数列型総和法を A, B とする．0 に収束する任意の数列は A, B 両総和法によっても値 0 に総和可能とする[2]．もし $A\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n=0$ なる任意の有界数列 $\boldsymbol{x}=\{x_n\}$ が B-総和可能であるならば，$B\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n=0$ である．

証明．　$\{x_n\}$ は有界で，かつ $A\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n=0$ なるゆえ，補助定理 26.2 により

$$\boldsymbol{x}^{(0)}=\{x_n{}^{(0)}\}=\{x_0,\ \alpha_1x_1,\ \cdots,\ \alpha_{n_0}x_{n_0},\ 0,\ 0,\ \cdots\},$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\{x_n{}^{(1)}\}=\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n_0},\ \alpha_{n_0+1}x_{n_0+1},\ \cdots,\ \alpha_{n_1}x_{n_1},\ 0,\ 0,\ \cdots\},$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)}=\{x_n{}^{(2)}\}=\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n_1},\ \alpha_{n_1+1}x_{n_1+1},\ \cdots,\ \alpha_{n_2}x_{n_2},\ 0,\ 0,\ \cdots\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$0\leqq\alpha_n\leqq1$，かつ

$$\sup_{n=0,1,\cdots}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}x_\nu{}^{(r)} - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}x_\nu\right| < \frac{1}{2^r} \qquad (r=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるような数列 $\{\alpha_n\}$ が存在する．

値 0 に A-総和可能であるような数列の全体からなる集合を $\mathscr{F}_N(A)$ とおくと，明らかに $\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{x}^{(1)}, \cdots$ は $\mathscr{F}_N(A)$ に属し，定理 25.1 と同様にして $\mathscr{F}_N(A)$ は (25.1), (25.2), (25.3) のセミノルムをもって (FK)-空間であることがわかる．したがって，いま $\{\gamma_n\}$ を任意の有界数列とすると，

$$\gamma_0\boldsymbol{x}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)})$$

は $[\mathscr{F}_N(A)]$ において収束する．それを $\boldsymbol{z}=\{z_n\}$ とおくと，(F_K) より

$$z_0=\gamma_0x_0,$$

$$z_1=\gamma_0\alpha_1x_1+\gamma_1(1-\alpha_1)x_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

2)　定理 2.5 参照．

$$z_{n_0}=\gamma_0\alpha_{n_0}x_{n_0}+\gamma_1(1-\alpha_{n_0})x_{n_0},$$
$$z_{n_0+1}=\gamma_1\alpha_{n_0+1}x_{n_0+1}+\gamma_2(1-\alpha_{n_0+1})x_{n_0+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$z_{n_1}=\gamma_1\alpha_{n_1}x_{n_1}+\gamma_2(1-\alpha_{n_1})x_{n_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

となる．ゆえに $\boldsymbol{z}=\{z_n\}$ は $\mathscr{F}_N(A)$ に属する有界数列であることがわかる．

定理の仮定より，$\mathscr{F}_N(A)$ に属する任意の有界数列 $\boldsymbol{x}=\{x_n\}$ に対し

$$f_n(\boldsymbol{x})=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_{n\nu}x_\nu \qquad (n=0,1,\cdots)$$

は収束する．さらに定理 24.4 より，これらの $f_n(\boldsymbol{x})$ $(n=0,1,\cdots)$ はすべて連続な線形汎関数である．ゆえに

$$f_n(\boldsymbol{z})=\gamma_0 f_n(\boldsymbol{x}^{(0)})+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k f_n(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}) \qquad (n=0,1,\cdots)$$

となる．定理の仮定より $\{z_n\}$ は B-総和可能であるから $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\boldsymbol{z})$ は収束する．

いま任意の $n=0,1,\cdots$ に対して，

$$c_{n0}=f_n(\boldsymbol{x}^{(0)}),$$
$$c_{nk}=f_n(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}) \qquad (k=1,2,\cdots)$$

とおくと，上式は

$$f_n(\boldsymbol{z})=\sum_{k=0}^{\infty}c_{nk}\gamma_k \qquad (n=0,1,\cdots)$$

と書ける．

行列 $C=(c_{nk})$ によって定義される数列－数列型総和法を C とすると，上述のことから，任意の有界数列は C-総和可能である．ゆえに C はシュアー行列である．ゆえに定理 3.4 より

(i) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|c_{nk}|$ は $n=0,1,\cdots$ に関して一様に収束し，かつ

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}c_{nk}=c_k \qquad (k=0,1,\cdots)$

である．いまの場合は B に関する定理の仮定より

$$c_k=\lim_{n\to\infty}c_{nk}=\lim_{n\to\infty}f_n(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}b_{n\nu}(x_\nu^{(k)}-x_\nu^{(k-1)})=0 \qquad (k=0,1,\cdots)$$

となる．ゆえに $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|c_{nk}|=0$，すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\{|f_n(\boldsymbol{x}^{(0)})|+\sum_{k=1}^{\infty}|f_n(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)})|\}=0$$

である．よって

$$\lim_{n\to\infty}f_n(\boldsymbol{x})=\lim_{n\to\infty}\{f_n(\boldsymbol{x}^{(0)})+\sum_{k=1}^{\infty}f_n(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)})\}=0,$$

すなわち $B\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n=0$ である．　(証明終)

定理 26.3 の証明は，次の補助定理を使うと，やや簡単になる．

補助定理 26.4.　もし行列 $A=(a_{n\nu})$ が

$$\sup_{n=0,1,\cdots}\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|<\infty$$

を満足するならば，適当に真三角行列 $B=(b_{n\nu})$ をつくり，B は

$$\sup_{n=0,1,\cdots}\sum_{\nu=0}^{\infty}|b_{n\nu}|<\infty$$

を満足し，かつ数列–数列型総和法 A, B は有界数列に対しては同値であるようにできる．

証明.　$m_0<m_1<\cdots<m_n<\cdots$ なる正の整数列を

$$\sum_{\nu=m_n}^{\infty}|a_{n\nu}|<\frac{1}{2^n}\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

であるようにえらぶ．$B=(b_{n\nu})$ は次のように定義すればよい:

$$b_{n\nu}=\begin{cases}0, & \text{ただし}\quad \nu<n<m_0,\\ 1, & \text{ただし}\quad \nu=n<m_0,\\ a_{j\nu}, & \text{ただし}\quad m_j\leqq n<m_{j+1},\quad \nu<m_j,\\ 1/2^n, & \text{ただし}\quad m_j\leqq\nu=n<m_{j+1},\\ 0, & \text{それ以外のすべての}\ n,\nu.\end{cases}$$

(証明終)

定理 26.5.　(**マズール・オルリッチ・ブルードノーの定理**)　数列－数列型総和法 $A=(a_{n\nu})$，$B=(b_{n\nu})$ はともにコンサーバティブで，かつ両総和法は収束数列に対しては共存するとする[3]．

$$\chi(A)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}-\sum_{\nu=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}a_{n\nu}$$

とおき，$\chi(A)\neq 0$ とする．もし A–総和可能な任意の有界数列 $\{x_n\}$ が B–

3)　収束数列 $\{x_n\}$ に対しては $A\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n=B\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n$ の意味．

総和可能であるならば，さらに

$$A\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = B\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$$

である．

証明． 総和法 A, B はコンザーバティブなるゆえ，定理 2.6 より

$$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu} = a_\nu, \quad \lim_{n\to\infty} b_{n\nu} = b_\nu \qquad (\nu=0, 1, \cdots)^{4)}$$

は存在する．いま

$$\bar{a}_{n\nu} = a_{n\nu} - a_\nu, \quad \bar{b}_{n\nu} = b_{n\nu} - b_\nu \qquad (n, \nu=0, 1, \cdots),$$

$\bar{A} = (\bar{a}_{n\nu})$, $\bar{B} = (\bar{b}_{n\nu})$ とおく．

数列 $\{x_n\}$ は有界で $A\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = s$ とする．いま

$$c = \frac{s - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x_\nu}{\chi(A)}$$

とおくと，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_{n\nu}(x_\nu - c) = 0,$$

すなわち $\bar{A}\text{-}\lim_{n\to\infty}(x_n - c) = 0$ である．

他方

$$\sup_{n=0,1,\cdots} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\bar{a}_{n\nu}| < \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{a}_{n\nu} = 0 \qquad (\nu=0, 1, \cdots)$$

であるから，定理 2.5 より，0 に収束する任意の数列は値 0 に $\bar{A}$-総和可能である．総和法 $\bar{B}$ についても同様である．

また定理の仮定より，$\bar{A}$-総和可能な任意の有界数列は $\bar{B}$-総和可能である．ゆえに $\bar{A}, \bar{B}$ は前定理の条件をみたす．よって

$$\bar{B}\text{-}\lim_{n\to\infty}(x_n - c) = 0.$$

定理の仮定より，A, B はともにコンザーバティブで，かつ両総和法は収束数列に対して共存するゆえ，特に数列 $\{1, 0, 0, \cdots\}$ を考えることにより $a_0 = b_0$ を得る．同様に

---

4) A-, B-総和法はコンザーバティブなるゆえ，$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|$, $\sum_{\nu=0}^{\infty}|b_\nu|$ はともに収束する．

$$a_\nu = b_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \cdots),$$

また数列 $\{1, 1, \cdots\}$ を考えることにより

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}$$

が得られる．よって $\chi(A)=\chi(B)$ である．

さて $\bar{B}\text{-}\lim_{n\to\infty}(x_n - c) = 0$ で，

$$c = \frac{s - \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x_\nu}{\chi(B)}$$

なるゆえ，$B\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = s$ である．（証明終）

系． 数列－数列型総和法 $A=(a_{n\nu})$ はパーマネントとする．もし A–総和可能な任意の有界数列 $\boldsymbol{x}=\{x_0, x_1, \cdots\}$ に対して，数列 $\boldsymbol{y}=\{y_0, y_1, \cdots\}=\{x_1, x_2, \cdots\}$ もまた A–総和可能であるならば，

$$A\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = A\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n \text{[5]}.$$

証明． いま行列 $B=(b_{n\nu})$ を

$$b_{n0} = 0,$$
$$b_{n\nu} = a_{n,\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

により定義すると，$A\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n = B\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$ なるゆえ定理より明らか．

（証明終）

演 習 問 題 4

1. 行列 A と (FK)–空間 $[\boldsymbol{S}\,;p_j]$, $[\boldsymbol{T}\,;q_j]$ が与えられている．任意の $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{T}$ に対して，$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ なるただ一つの $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$ が，もし存在するならば，$\{\boldsymbol{x}\,|\,A\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{T}\}\cap\boldsymbol{S}$ はセミノルム $q_j(A\boldsymbol{x})$ をもって (FK)–空間であることを示せ．また写像 $x_k=f_k(\boldsymbol{y})$ は空間 $\boldsymbol{T}$ において線形連続である．

2. コンサーバティブな行列 A が，もしある有界発散数列を総和するならば，ある非有界数列も総和することを示せ．

5)　すなわち総和法 A は右へ転移的である．

問題のヒント

演習問題 1.　**2.**　もし数列 $\{s_n\}$ が発散する有界実数列とすると，

$$s_n' = \frac{s_n - \varliminf_{n\to\infty} s_n}{\varlimsup_{n\to\infty} s_n - \varliminf_{n\to\infty} s_n} \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおくと $\varliminf_{n\to\infty} s_n'=0$, $\varlimsup s_n'=1$ である．どのような T-行列 A を与えても $\{s_n'\}$ は A-総和可能でないような部分列を含む（定理 3.1 シュタインハウスの定理参照）．

3.　$\{s_n\}$ は有界発散数列ゆえ，適当に z_1, z_2（ただし $z_1 \neq z_2$）と $\mu_0<\nu_0<\mu_1<\nu_1<\cdots$ をえらぶと，$\lim_{n\to\infty} s_{\mu_n}=z_1$, $\lim_{n\to\infty} s_{\nu_n}=z_2$, かつ $s_{\mu_n} \neq s_{\nu_n}$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ とできる．変換

$$y_n = \frac{s_{\nu_n}-t_n}{s_{\nu_n}-s_{\mu_n}} x_{\mu_n} + \frac{t_n - s_{\mu_n}}{s_{\nu_n}-s_{\mu_n}} x_{\nu_n} \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

は求めるものである．

6.　行列 $A=(a_{n\nu})$, $a_{n\nu}=a_{n\nu}'+ia_{n\nu}''$ は T-行列とし，

$$\zeta_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = \zeta_n' + i\zeta_n'' \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$$

とおく．ここで $a_{n\nu}', a_{n\nu}'', \zeta_n', \zeta_n''$ はすべて実数である．すると $\lim_{n\to\infty}\zeta_n'=1$, $\lim_{n\to\infty}\zeta_n''=0$ で，さらに行列 $(a_{n\nu}')$ は T-行列である．次に定理 3.1 を使う．

演習問題 2.　**3.**　$|z|\leqq 1$, ただし $z=1$ を除く．

4.　$s_n=u_0+\cdots+u_n$, $S_n^{(k)}=\binom{n+k-1}{k-1}s_0+\binom{n-1+k-1}{k-1}s_1+\cdots+\binom{k}{k-1}s_{n-1}+s_n$,

$s_n'=v_0+\cdots+v_n$, $S_n'^{(l)}=\binom{n+l-1}{l-1}s_0'+\binom{n-1+l-1}{l-1}s_1'+\cdots+\binom{l}{l-1}s_{n-1}'+s_n'$,

$\bar{s}_n=w_0+\cdots w_n$, $\bar{S}_n^{(h)}=\binom{n+h-1}{h-1}\bar{s}_0+\binom{n-1+h-1}{h-1}\bar{s}_1+\cdots+\binom{h}{h-1}\bar{s}_{n-1}+\bar{s}_n$

とおくと，仮定より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{(k)}}{n^k}=\frac{s}{\Gamma(k+1)}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n'^{(l)}}{n^l}=\frac{t}{\Gamma(l+1)}.$$

他方 $(u_0+u_1x+\cdots+u_nx^n)(1-x)^{-(k+1)}$ と $(v_0+v_1x+\cdots+v_nx^n)(1-x)^{-(l+1)}$ の積を考えることにより

$$\bar{S}_n^{(k+l+1)}=S_n^{(k)}S_0'^{(l)}+S_{n-1}^{(k)}S_1'^{(l)}+\cdots+S_0^{(k)}S_n'^{(l)}.$$

定理 6.2 より $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\bar{S}_n^{(k+l+1)}}{n^{k+l+1}}=\dfrac{st}{\Gamma(k+l+2)}$.

5.　$p_n=1$, $P_n=n+1$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ とおくと $(N,\ p_n)$-総和法は $(C,\ 1)$-総和法となる．$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n$, $q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n$, $k(x)=q(x)/p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}k_nx^n$ とおくと，$p(x)=1/(1-x)$

$$k_0=q_0, \quad k_n=q_n-q_{n-1} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

となり，条件 (7.2) は

$$(n+1)q_0+n|q_1-q_0|+\cdots+|q_n-q_{n-1}|\leqq HQ_n$$

となり，この式は $\{q_n\}$ が単調増加数列ならば満足される．

6.　数列 $\{s_n\}$ に対して，$\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}s_\nu$ とおくと，$s_\nu=(\nu+1)\sigma_\nu-\nu\sigma_{\nu-1}$ なるゆえ，

$$t_n\log(n+1)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{s_\nu}{\nu+1}=\sum_{\nu=0}^{n}\left(\sigma_\nu-\frac{\nu}{\nu+1}\sigma_{\nu-1}\right)$$

$$=\sigma_n+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\sigma_{\nu-1}}{\nu+1}.$$

ゆえに $t_n=\frac{\sigma_n}{\log(n+1)}+\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\sigma_{\nu-1}}{\nu+1}$．したがって，もし $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=s$ ならば $\lim_{n\to\infty}t_n=s$．

いま $s_n=2(-1)^n n+(-1)^n$ $(n=0, 1, \cdots)$ とおくと，$\sigma_n=(-1)^n$ であるが $\lim_{n\to\infty}t_n=0$．

11.　巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ が $E_{1/2}$-総和可能であるような z の範囲は $|z+1|<2$ であるが，この巾級数が $(C, 1)$-総和可能であるような z の範囲は $|z|\leqq1$ (ただし $z=1$ を除く) である．しかし $s_{\nu^2}=\nu$ $(\nu=1, 2, \cdots)$，それ以外は $s_n=0$ であるような数列 $\{s_n\}$ は値 1/2 に $(C, 1)$-総和可能であるが，$E_{1/2}$-総和可能でない．

12.　W. Meyer-König, Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren, Math. Z. **52**, 1949, p. 283 参照．

13.　D. Borwein, On a scale of Abel-type summability methods, Proc. Cambridge Philos. Soc. **53**, 1957, p. 321 参照．

14.　W. Meyer-König 上記論文 p. 283 注参照．

演習問題 3.

4.　G. H. Hardy, J. E. Littlewood, The relations between Borel's and Cesàro's methods of summation, Proc. London Math. Soc. (2) **11**, 1913, 1–16 参照．

さらに

G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential method, Rend. Circ. Mat. Palermo **41**, 1916, 36–58 ではタウバー型条件は $u_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ と一般化されている．

5.　上記論文 p. 52 にタウバー型条件は，$u_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ と一般化されることが示されている．

6.　W. Meyer-König, Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren, Math. Z. **52**, 1949, p. 302 以後ではタウバー型条件は $u_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ と一般化されている．

演習問題 4.

1. K. Zeller, FK-Räume und Matrixtransformationen, Math. Z. **58**, 1953, p. 46 参照.

2. K. Zeller, Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren, Math. Z. **53**, 1951, p. 482 参照.

参　考　書

本書を執筆するにあたって，しばしば参照した書物をあげる．

〔1〕 高木貞治，解析概論，改訂第3版．岩波書店 (1974)．

〔2〕 辻正次，複素函数論．槇書店 (1968)．

〔3〕 前田周一郎，函数解析．森北出版 (1974)．

〔4〕 山中健，線形位相空間と一般関数．共立出版 (1970)

〔5〕 S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warsawa (1932).

〔6〕 N.K. Bary, A treatise on trigonometric series, I, II, Pergamon (1964) (Translation from Russian, 1961).

〔7〕 K. Chandrasekharan, S. Minakshisundaram, Typical means,Oxford (1952).

〔8〕 R.G. Cooke, Infinite matrices and sequence spaces, Macmillan (1950).

〔9〕 P. Dienes, The Taylor series, Oxford (1931).

〔10〕 G.H. Hardy, Divergent series, Oxford (1949).

〔11〕 G.H. Hardy, M. Riesz, The general theory of Dirichlet's series, Cambridge (1915).

〔12〕 E.W. Hobson, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier series, II, Cambridge (1926).

〔13〕 K. Ishiguro, On the summability methods of divergent series, Bruxelles (1965).

〔14〕 K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer (1947).

〔15〕 G.M. Petersen, Regular matrix transformations, McGraw-Hill (1966).

〔16〕 A. Peyerimhoff, Lectures on summability, Springer (1969).

〔17〕 H.R. Pitt, Tauberian theorems, Oxford (1958).

〔18〕 O. Szász, Introduction to the theory of divergent series, University of Cincinnati (1952).

〔19〕 E.C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford (1937).

〔20〕 E.C. Titchmarsh, The theory of functions, Oxford (1939).

〔21〕 D.V. Widder, The Laplace transform, Princeton University Press (1946).

〔22〕 N. Wiener, The Fourier integral and certain of its applications, (1933).

〔23〕 K. Zeller, W. Beekmann, Theorie der Limitierungsverfahren, Springer (1970).

〔24〕 A. Zygmund, Trigonometric series, I, II, Cambridge (1959).

本文中の諸定理については，それぞれ次の論文を参照されたい．

定理 3.1： H. Steinhaus, Remarks on the generalization of the idea of limit, (In Polish) Prace mat.-fiz. **22**, 1913, 121–134.

定理 3.2, 3.3： C. Goffman, G. M. Petersen, Consistent limitation methods, Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 1956, 367-369.

定理 3.4： I. Schur, Über lineare Transformation in der Theorie der unendlichen Reihen, J. Reine Angew. Math. **151**, 1921, 79–111.

定理 5.1–5.5： P. Erdös, G. Piranian, Convergence fields of row-finite and row-infinite Toeplitz transformations, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 1950, 397–401. G. Lorentz, K. Zeller, Summation of sequences and summation of series, Proc. Amer. Math. Soc. **15**. 1964, 743–746.

定理 8.2： S. Chapman, On non-integral orders of summability of series and integrals, Proc. London Math. Soc. (2) **9**, 1910, 369–409.

定理 8.8： W. Jurkat, Über Rieszsche Mittel mit unstetigem Parameter, Math. Z. **55**, 1951, 8–12.

定理 8.10： M. Riesz, Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation, Proc. London Math. Soc. (2) **22**, 1924, 412–419. A. Peyerimhoff, On convergence fields of Nörlund means, Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 1956, 335–347. B. Kuttner, (a) On discontinuous Riesz means of type n, J. London Math. Soc. **37**, 1962, 354–364.

定理 9.13： F. Hausdorff, (a) Summationsmethoden und Momentfolgen I, Math. Z. **9**, 1921, 74–109. (b) Summationsmethoden und Momentfolgen II, Math. Z. **9**, 1921, 280–299. (c) Momentprobleme für ein endliches Intervall, Math. Z. **16**, 1923, 220–248.

定理 9.17： M. S. Ramanujan, (a) Series-to-series quasi-Hausdorff transformations, J. Indian Math. Soc. (N. S.) **17**, 1953, 47–53.

定理 11.7, 11.8： R. P. Agnew, Euler transformations, Amer. J. Math. **66**, 1944, 313–338.

定理 11.9： W. Meyer-König, K. Zeller, Euler-Knopp-und Borel-Verfahren komplexer Ordnung, Math. Z. **82**, 1963, 394–402.

§12 の諸定理については, W. Meyer-König, (a) Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren, Math. Z. **52**, 1949, 257–304.

§13 の諸定理については, W. Meyer-König (a) および W. Meyer-König, (b) Die E_p–und S_α–Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze, Math. Z. **52**, 1949, 344–354. P. Vermes, Series to series transformations and analytic continuation by metrix methods, Amer. J, Math. **71**, 1949, 541–562.

§14 の諸定理については, M. S. Ramanujan, (a) および M. S. Ramanujan, (b) On Hausdorff and quai-Hausdorff methods of summability, Quart. J. Math. II

Ser. **8**, 1957, 197–213. (c) A note on the quasi-Hausdorff series-to-series transformations, J. London Math. Soc. **32**, 1957, 27–32.

定理 15.3, 15.6: D. Borwein, (a) On the methods of summability based on power series, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, **64**, 1957, 342–349.

定理 15.4, 15.9: D. Borwein, (b) On a scale of Abel-type summability methods, Proc. Cambridge Philos. Soc. **53**, 1957, 318–322.

(J, p_n)-総和法についてはさらに A. Jakimovski, The sequence-to-function analogues to Hausdorff transformations, Bull. Res. Council Israel, Sect. 8F, 1960, 135–154.

定理 16.1, 16.2: D. Borwein, (c) A logarithmic method of summability, J. London Math. Soc. **33**, 1958, 212–220.

定理 16.3: D. Borwein (a).

定理 16.4: K. Ishiguro, (a) On the summability methods of logarithmic type, Proc. Japan Acad. **38**, 1962, 703–705. (b) A converse theorem on the summability methods, ibid. **39**, 1963, 38–41. (c) Tauberian theorems concerning the summability methods of logarithmic type, ibid. **39**, 1963, 156–159. (d) A note on the logarithmic means, ibid. **39**, 1963, 575–577. M.S. Rangachari, Y. Sitaraman, Tauberian theorems for logarithmic summability (L), Tōhoku Math. J. (2) **16**, 1964, 257–269.

定理 17.5: W. Meyer-König (a).

定理 18.2–18.7: J. Marcinkiewicz, On Riemann's two methods of summation, J. London Math. Soc. **10**, 1935, 268–272. S. Verblunsky, On the theory of trigonometric series (VI), Proc. London Math. Soc. (2) **38**, 1935, 284–326. B. Kuttner, (b) Some relations between different kinds of Riemann summability, Proc. London Math. Soc. (2) **40**, 1936, 524–540. G.H. Hardy, W.W. Rogosinski, (a) Notes on Fourier series (IV): Summability (R_2), Proc. Cambridge Philos. Soc. **43**, 1947, 10–25. (b) Notes on Fourier series (V): Summability (R_1) ibid. **45**, 1949, 173–185.

定理 18.8, 18.9: G.G. Lorentz, (a) A contribution to the theory of divergent sequences, Acta Math. **80**, 1948, 167–190. (b) Direct theorems on methods of summability, Canad. J. Math. **1**, 1949, 305–319.

定理 19.1: A. Tauber, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, Monatsh. Math. **8**, 1897, 273–277.

定理 19.2: W. Meyer-König, H. Tietz, On Tauberian conditions of type ***o***, Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 1967, 926–927.

定理 19.3: J.E. Littlewood, The converse of Abel's theorem on power series, Proc. London Math. Soc. (2) **9**, 1911, 434–448.

定理 19.4, 19.5: G.H. Hardy, J.E. Littlewood, (a) Tauberian theorems con-

cerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, Proc. London Math. Soc. (2) **13**, 1914, 174–191.

これらの定理の別証明については,

J. Karamata, Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen, J. Reine Angew. Math. **164**, 1931, 27–39. H. Wielandt: Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes, Math. Z. **56**, 1952, 206–207.

定理 19.8: E. Landau, Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer, Prace mat.-fiz **21**, 1910, 97–177.

(19.12), (19.13) のタウバー型条件については, O. Szász, Generalization of two theorems of Hardy and Littlewood on power series, Duke Math. J. **1**, 1935, 105–111.

定理 19.10: G.H. Hardy, J.E. Littlewood, (b) Some theorems concerning Dirichlet's series, Messenger of Math. **43**, 1914, 134–147.

§20, 21 については, N. Wiener, Tauberian theorems, Ann. of Math. (2) **33**, 1932, 1–100. N. Wiener〔22〕. S. Bochner, Umkehrsätze für allgemeine Limitierungsverfahren, Sitzungsberichte Akad. Wiss. Berlin, 1933, 126–144. H. Pitt, General Tauberian theorems, Proc. London Math. Soc. (2) **44**, 1938, 243–288. H. Pitt〔17〕を参照.

D. Widder〔21〕, G.H. Hardy〔10〕にこの理論の極めて明晰な紹介がある. 本書はこの後者に従って述べた.

第4章については, S. Mazur, W. Orlicz, (a) Sur les méthodes linéaires de sommation, C. R. Acad. Sci. Paris, **196**, 1933, 32–34. (b) On linear methods of summability, Studia Math. **14**, 1954, 129–160. A. Brudno, Summation of bounded sequences by matrices (In Russian), Mat. Sbornik N.S. **16** (**58**) 1945, 191–247.

K. Zeller, (a) Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren, Math. Z. **53**, 1951, 463–487. (b) Abschnittskonvergenz in *FK*-Räumen, Math. Z. **55**, 1951, 55–70. (c) Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren, Math. Z. **56**, 1952, 134–151.

索　　引

(括弧内の術語は英語，時にドイツ語をつけた)

著 者 略 歴

石黒　一男
1944年　北海道大学理学部物理学科卒業
現　在　北海道大学教授
　　　　理学博士
専　攻　級数論

数学全書 14
発散級数論

1977年 2 月18日　第 1 版第 1 刷発行

定価はカバー・ケース
に表示してあります.

著者との協議
により検印は
廃止します.

著　者　石　黒　一　男（いし ぐろ かず お）
発行者　森　北　肇
印刷者　加　藤　保　幸

発行所　森北出版 株式会社
東京都千代田区富士見 1-4-11
電話 東京（265）8 3 4 1（代表）
振替 東京 1-34757 郵便番号 102

日本書籍出版協会・自然科学書協会・工学書協会 会員

落丁・乱丁本はお取替えいたします　　印刷 加藤文明社／製本 鬼原製本

3341-1244-8409

Printed in Japan